EIN BEITRAG ZUR THEORIE SPEZIELLER KONVEXER KÖRPER IN NORMIERTEN LINEAREN RÄUMEN

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Uwe Schmidtmann
aus Holzminden

Göttingen 1976

EIN BEITRAG ZUR THEORIE SPEZIELLER KONVEXER KÖRPER IN NORMIERTEN LINEAREN RÄUMEN

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Uwe Schmidtmann
aus Holzminden

Göttingen 1976

D 7

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Referent: Prof.Dr.B.Brosowski

Korreferent: Prof.Dr.J.Werner

Tag der mündlichen Prüfung: 12.2.1976

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

§ 1 Grundlagen 1

§ 2 Geometrisch vollständige Mengen 26

§ 3 In- und Umkugel 55

§ 4 Körper konstanter Breite 70

§ 5 Fixpunktsätze mengenwertiger nicht expansiver Abbildungen 96

Anhang 110

Verzeichnis der Symbole 114

Literaturverzeichnis 115

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41534921_0041

Einleitung

In der Theorie der konvexen Körper des n-dimensionalen euklidschen Raumes sind die Körper konstanter Breite intensiv untersucht worden. Einen Überblick vermitteln z.B. Bonnessen Fenchel [3] , Eggleston [13] .

Eine nicht leere, beschränkte Teilmenge M eines normierten reellen linearen Raumes E heißt

- konvexer Körper , wenn M konvex und abgeschlossen ist;[1]
- geometrisch vollständig , wenn M keine echte Teilmenge einer Menge gleichen Durchmessers ist;
- von konstanter Breite , wenn für alle $x' \in S'$

$$B(x',M) := \sup_{x \in M} \langle x,x' \rangle - \inf_{x \in M} \langle x,x' \rangle$$

konstant ist;

- Körper konstanter Breite, wenn M ein konvexer Körper von konstanter Breite ist.

Dabei bezeichnet S' den Rand der Einheitskugel des Dualraumes von E; der Durchmesser diam(M) von M ist als das Supremum der Abstände aller Paare von Punkten aus M erklärt.[1]

Insbesondere ist jede geometrisch vollständige Menge ein konvexer Körper, und jeder Körper konstanter Breite ist geometrisch vollständig (s. § 2, 2.1).

---

[1] Aussagen topologischer Natur über Teilmengen von F bzw. des Dualraumes F' von E beziehen sich auf die Normtopologien von E bzw. F'; werden andere Topologien auf E bzw. E' betrachtet, sowird dieses an den betreffenden Stellen explizit angegeben.

Die geometrisch vollständigen Mengen des n-dimensionalen euklidischen Raumes haben eine bemerkenswerte Eigenschaft: sie sind von konstanter Breite. Jedoch stellt der Begriff 'geometrisch vollständige Menge' für beliebige normierte reelle Vektorräume eine Erweiterung des Körpers konstanter Breite dar; denn durch Beispiele kann belegt werden, daß es geometrisch vollständige Mengen von nicht konstanter Breite gibt (s. § 2).

Im Mittelpunkt der vorliegenden Arbeit steht die Untersuchung der Eigenschaften geometrisch vollständiger Mengen; dabei beschränken wir uns nicht auf endlichdimensionale reelle Banachräume, sondern stellen die Untersuchungen für beliebige normierte reelle Vektorräume an. Die Beschränkung auf normierte reelle lineare Räume ist rein technischer Natur; sie dient der Vereinfachung der Schreibweise. Alle Aussagen dieser Arbeit lassen sich auf normierte komplexe Vektorräume übertragen. In diesem Rahmen untersuchen wir insbesondere die folgenden Fragen:

(I) Welche bekannten Eigenschaften der Körper konstanter Breite des n-dimensionalen euklidschen Raumes gelten für geometrisch vollständige Mengen in beliebigen normierten reellen linearen Räumen?

(II) Welche normierten reellen linearen Räume haben die Eigenschaft (A), (B) oder (C)?

(III) Lassen sich die geometrisch vollständigen Mengen zerlegen?

Es sei E ein normierter reeller linearer Raum und $M \subset E$ ein konvexer Körper.

M heißt homothetisch zu einem konvexen Körper $N \subset E$, wenn es ein $x \in E$ und eine reelle Zahl $\lambda > 0$ gibt,

so daß

$$N = \lambda M + x$$

gilt.

M heißt zerlegbar, wenn es zwei konvexe Körper $N_1, N_2 \subset E$ mit

$$M = \overline{N_1 + N_2}$$

gibt, so daß M nicht zu N_1 oder N_2 homothetisch ist. Dabei bezeichnet $N_1 + N_2$ die Menge

$$\{x+y \in E : x \in N_1, \quad y \in N_2\} \quad \text{und}$$

$\overline{N_1 + N_2}$ den Abschluß der Menge $N_1 + N_2$.

Von Eggleston [14] übernehmen wir die Definitionen: E hat die Eigenschaft

- (A) ,wenn jede geometrisch vollständige Menge in E von konstanter Breite ist;
- (B) ,wenn jede geometrisch vollständige Menge in E eine Kugel ist;
- (C) ,wenn jeder Körper konstanter Breite in E eine Kugel ist.

Bezeichnet U die Einheitskugel in E, dann verstehen wir unter einer Kugel mit dem Mittelpunkt x und dem Radius $s \geq o$ die Menge $x + s\,U$.

Im folgenden sei E stets ein normierter reeller Vektorraum, E' der Dualraum von E und U(bzw.U') die Einheitskugel in E(bzw.E').

AD(I).

Bislang ist sehr wenig über die Eigenschaften geometrisch vollständiger Mengen in normierten Vektorräumen bekannt. Lediglich Eggleston [14] hat einige Untersuchungen in endlichdimensionalen Banachräumen durchgeführt. Dabei zeigt er:

Ist E endlichdimensional und $M \subset E$ ein konvexer Körper mit dem Durchmesser s, dann gilt:

(a) M ist genau dann geometrisch vollständig, wenn

$$M = \bigcap_{x \in M} (x + s\,U)$$

gilt.

(b) Hat M einen inneren Punkt, dann ist M genau dann geometrisch vollständig, wenn es zu jedem Randpunkt x von M einen Randpunkt y von M mit

$$\|x - y\| = s$$

gibt.

Eggleston [14] nennt die geometrisch vollständigen Mengen (vermutlich wegen (b)) diametral maximale Mengen. Wir haben uns für den Terminus 'geometrisch vollständige Menge' entschieden, um zu betonen, daß die Geometrie der Einheitskugel großen Einfluß auf die Eigenschaften geometrisch vollständiger Mengen hat. Dieser Einfluß wird bereits an (a) deutlich. Denn wir können zeigen, daß (a) unabhängig von der Dimension von E gilt. Ferner geben wir eine zu (a) äquivalente Fassung (c) an, die die Aussage über den Durchschnitt der Kugeln $x + s\,U$ $(x \in M)$ durch eine Aussage über die Faltung der Stützfunktionen der Kugeln $x + s\,U$ $(x \in M)$ ersetzt.

Es gilt:

Ist $M \subset E$ ein konvexer Körper mit dem Durchmesser s, dann gilt:

(c) M ist genau dann geometrisch vollständig, wenn die Stützfunktion von M gleich der Regularisierung der Faltung der Stützfunktionen der Kugeln $x + s\,U$ $(x \in M)$ ist.

(Zur Definition der Stützfunktion s.S. 5 , der Faltung von Stützfunktionen und deren Regularisierung s.S.11 und speziell 1.5).

Diese Charakterisierung der geometrisch vollständigen Mengen vermöge der Faltung von Stützfunktionen scheint vorerst nur von theoretischem Interesse zu sein, da in den von uns betrachteten Beispielen die Berechnung des Durchschnitts der Kugeln $x + s\,U$ $(x \in M)$ einfacher ist als die der Faltung der Stützfunktionen.

Zu (b) können wir die folgenden Aussagen machen:

Falls E endlichdimensional ist, ist (b) äquivalent zu:

(b') Ein Eikörper $M \subset E$ ist genau dann geometrisch vollständig, wenn M diametral maximal ist.

Dabei heißt ein konvexer Körper $M \subset E$

- Eikörper ,wenn M einen inneren Punkt enthält;
- diametral maximal, wenn für jeden Randpunkt x von M

$$\rho(x,M) := \sup_{y \in M} \|x - y\| = \operatorname{diam}(M)$$

gilt.

Wir zeigen, daß (b') unabhängig von der Dimension von E gilt und daß die Voraussetzung 'M Eikörper' fallen gelassen werden kann, wenn E eine Normalstruktur hat

> Nach Brodskii und Milman [6] hat E eine Normalstruktur, wenn es zu jedem konvexen Körper $M \subset E$ mit einem von O verschiedenen Durchmesser einen Punkt $x \in M$ gibt, für den
>
> $$\rho(x,M) < \operatorname{diam}(M)$$
>
> gilt.

Da jeder endlichdimensionale Banachraum eine Normalstruktur hat (s.§2 Bem.7), kann die von Eggleston in (b) gemachte Voraussetzung M Eikörper fallen gelassen werden.
Außerdem geben wir den folgenden Charakterisierungssatz:

(d) E hat genau dann eine Normalstruktur, wenn jeder diametral maximale konvexe Körper $M \subset E$ mit einem von O verschiedenen Durchmesser ein geometrisch vollständiger Eikörper ist.

Über die Auseinandersetzung mit diesen Ergebnissen von Eggleston hinaus zeigen wir Eigenschaften geometrisch vollständiger Mengen in Analogie zu den bekannten Eigenschaften von Körpern konstanter Breite des n-dimensionalen euklidischen Raumes auf, wie sie z.B. in Bonnessen, Fenchel [3,§5] dargestellt sind.
Dabei zeigen wir u.a.:

(e) Jede nicht leere, beschränkte Menge $M \subset E$ ist in einer geometrisch vollständigen Menge $N \subset E$ enthalten, die den gleichen Durchmesser wie M hat.
N heißt geometrische Vervollständigung von M.

(f) Die Summe aus dem Inkugelradius und dem Umkugelradius einer jeden geometrisch vollständigen Menge $M \subset E$ ist gleich dem Durchmesser von M .

(g) Zu jeder Umkugel einer geometrisch vollständigen Menge gibt es eine zur Umkugel konzentrische Inkugel. Insbesondere ist die Menge der Umkugelmittelpunkte einer geometrisch vollständigen Menge gleich der Menge der Inkugelmittelpunkte.

(Zur Definition des In- und Umkugelradius' und der der Um- und Inkugel s.S.19,23.)

Die Aussage (e) ist für die n-dimensionalen euklidischen Räume bekannt, die dort gegebenen Beweise verwenden Kompaktheitsaussagen (s. z.B.[3],[13]), die für beliebiges E nicht zur Verfügung stehen. Wir entwickeln daher ein neues Konstruktionsverfahren, das sich allein auf den in (a) angegebenen Charakterisierungssatz geometrisch vollständiger Mengen stützt.

Die Aussage (f) liefert uns ein einfaches Kriterium dafür, wann eine geometrisch vollständige Menge ein Eikörper ist. Geometrisch vollständige Mengen mit einem von 0 verschiedenen Durchmesser müssen nicht notendig Eikörper sein. Beispiele hierfür werden im §2 gegeben. Im §3 geben wir eine Reihe von normierten linearen Räumen an,in denen jede geometrisch vollständige Menge mit einem von 0 verschiedenen Durchmesser ein Eikörper ist. Speziell für uniform konvexe Räume läßt sich stets eine untere Abschätzung des Inkugelradius' geometrisch vollständiger Mengen angeben.

Aus (g) erhalten wir, daß die Menge der Umkugelmittelpunkte einer geometrisch vollständigen Menge M stets in M enthalten ist. Diese Aussage ist für beliebige konvexe Körper $M \subset E$ dann und nur dann richtig, wenn E ein Hilbertraum oder zweidimensional und strikt konvex ist (s.[25,Cor.3])

Ad(II)

Da jede Kugel von konstanter Breite ist und jeder Körper konstanter Breite geometrisch vollständig ist, gelten in E die Inklusionen

$$\mathfrak{M}_K \subset \mathfrak{M}_B \subset \mathfrak{M}_G \ ;$$

dabei bezeichnet $\mathfrak{M}_K$ die Menge aller Kugeln aus E, $\mathfrak{M}_B$ die Menge aller Körper konstanter Breite aus E und $\mathfrak{M}_G$ die Menge aller geometrisch vollständigen Mengen aus E. Und es gilt:

$\mathfrak{M}_B = \mathfrak{M}_G \quad \rightleftharpoons$ E hat die Eigenschaft (A);

$\mathfrak{M}_K = \mathfrak{M}_G \quad \rightleftharpoons$ E hat die Eigenschaft (B);

$\mathfrak{M}_K = \mathfrak{M}_B \quad \rightleftharpoons$ E hat die Eigenschaft (C).

Die Geometrie der Einheitskugel des Raumes E bestimmt, ob die Inklusionen jeweils echt sind oder nicht. Eggleston [14] hat hierfür Beispiele endlichdimensionaler Banachräume angegeben. Insbesondere weist er darauf hin, daß die bekannten Konvexitäts- und Glattheitsbegriffe (wie z.B. uniform konvex, glatt konvex) nicht geeignet sind, die normierten Räume E mit der Eigenschaft (A) zu charakterisieren. Er belegt dies an einigen Beispielen. Die Frage nach einer Charakterisierung der normierten linearen Räume E mit der Eigenschaft (A) bleibt offen; wir können jedoch die Eigenschaft (A) für eine spezielle Klasse von Banachräumen, den Hilberträumen, nachweisen:

Jeder Hilbertraum E, dessen Dimension größer oder gleich 2 ist, hat die Eigenschaft (A) und nicht die Eigenschaft (C).

D.h. über den Spezialfall des n-dimensionalen euklidischen Raumes hinaus gilt allgemein in Hilberträumen die Äquivalenz der Begriffe 'Geometrisch vollständige Menge' und 'Körper konstanter Breite'. Und es gilt in Hilberträumen, daß es außer den Kugeln weitere Körper konstanter Breite gibt.

Weitere Beispiele von unendlichdimensionalen Banachräumen mit der Eigenschaft (A) werden in § 4 gegeben. Trivialerweise impliziert die Eigenschaft (B) die Eigenschaft (A) und die Eigenschaft (C); d.h. in den Räumen mit der Eigenschaft (B) gibt es außer den Kugeln keine weiteren geometrisch vollständigen Mengen. Für diese normierten linearen Räume können wir einen einfachen Charakterisierungssatz angeben :

> E hat genau dann die Eigenschaft (B), wenn jeder konvexe Körper $M \subset E$ den Umkugelradius $\frac{1}{2}$ diam (M) hat. Insbesondere ist E ein Banachraum, wenn E die Eigenschaft (B) hat.

Der Beweis dieses Satzes beruht auf der Aussage, daß jeder konvexe Körper eine geometrische Vervollständigung hat. Beispiele für Banachräume, die die Eigenschaft (B) haben, bzw. die nicht die Eigenschaft (B) haben, liefern die Banachräume $C(Q)$, die wie folgt definiert sind:

> Es sei Q ein vollständig regulärer Raum. $C(Q)$ bezeichne den linearen Raum aller auf Q reellen, beschränkten und stetigen Funktionen x, versehen mit der Supremumsnorm
>
> $$||x|| := \sup_{t \in Q} |x(t)| \quad .$$
>
> Q heißt extrem unzusammenhängend, wenn der Abschluß jeder offenen Menge aus Q offen in Q ist.

$C(Q)$ hat die Eigenschaft (B), wenn Q extrem unzusammenhängend ist. Beispiele hierfür sind die Banachräume $\ell^\infty (= C(\mathbb{N}))$ und $\ell^\infty(n)$ $(= C(\{1,2,\ldots,n\}))$.

Offen ist, ob jeder Banachraum E mit der Eigenschaft (B) zu einem der Räume $C(Q)$ mit Q extrem unzusammenhängend isometrisch ist.

Dagegen haben die Banachräume $C(\mathbb{R})$ und $C([0,1])$ beliebig viele geometrisch vollständige Mengen, die keine Kugeln sind. Durch eine Charakterisierung der geometrisch vollständigen Mengen in $C(Q)$ durch spezielle unter- und oberhalbstetige Funktionen auf Q, können wir diese explizit angenben (s.hierzu 2.5) .

Die Räume $C(Q)$ haben stets die Eigenschaft (C); d.h. außer den Kugeln gibt es in diesen Banachräumen keine weiteren Körper konstanter Breite. Die normierten linearen Räume E mit der Eigenschaft (C), können wir wie folgt charakterisieren:

> E hat genau dann die Eigenschaft (C), wenn U irreduzibel ist.

(Zur Definition irreduzibler konvexer Körper s.S.71)

Diese Charakterisierung der normierten linearen Räume E mit der Eigenschaft (C) hat den Vorteil, daß wir im Fall endlicher Dimension von E auf bekannte Beispiele von irreduziblen konvexen Körpern zurückgreifen können. Gale [16] und Shepard [31] haben einige irreduzible konvexe Körper angegeben.

Ad(III)

Ist $E = C(Q)$[1], dann können wir für jede geometrisch vollständige Menge $M \subset E$ die Beziehung

$$M = \mathfrak{R}M + r(M)\, U$$

zeigen; dabei bezeichnet $\mathfrak{R}M$ die Menge der Umkugelmittelpunkte von M und $r(M)$ den Inkugelradius von M. Ist $\mathfrak{R}M$ keine Kugel und $r(M)>o$, dann ist $\mathfrak{R}M$ nicht zu U homothetisch; d.h. in diesem Fall läßt sich M in $\mathfrak{R}M$ und $r(M)\, U$ zerlegen.

Für beliebige konvexe Körper eines normierten linearen Raumes E ist die Frage der Zerlegbarkeit nicht so einfach zu behandeln wie in dem obigen Spezialfall. Bislang ist sehr wenig über die Zerlegbarkeit von konvexen Körpern bekannt. Lediglich für den Fall, daß E zweidimensional ist, sind alle nicht zerlegbaren konvexen Körper bekannt: es sind dies alle Dreiecke und Liniensegmente. Einen Überblick der bekannten Resultate vermittelt [19,Chap.15].

Aufgrund der großen Affinität von Kugeln und geometrisch vollständigen Mengen, vermuten wir, daß sich jede geometrisch vollständige Menge in E immer dann zerlegen läßt, wenn die Einheitskugel U von E zerlegbar ist.

Für die Einheitskugel (und somit für alle Kugeln) des Hilbertraumes können wir ein Konstruktionsverfahren angeben, das uns eine Zerlegung der Einheitskugeln in zwei konvexe Körper liefert. Leider ist es uns noch nicht gelungen, dies Verfahren auf die Körper konstanter Breite des Hilbertraumes zu übertragen.

An dieser Stelle sei vermerkt, daß man in dieser Arbeit keine umfassende Theorie der geometrisch vollständigen Mengen in normierten linearen Räumen erwarten sollte. Vielmehr liefert diese Arbeit einen ersten Beitrag zur Untersuchung spezieller

---

([1]) Zur Definition s. S.IX .

konvexer Körper, den geometrisch vollständigen Mengen; dabei wird deutlich, daß der Begriff 'konvexer Körper' viel zu allgemein ist, um die Feinstrukturen dieser Körper erfassen zu können. Gerade in den Anwendungen der Funktionalanalysis hat man oft spezielle konvexe Körper zu untersuchen.

Zu dem von Garhavi [17] gestellten Problem der Bestimmung einer bestmöglichen n-Überdeckung einer nicht leeren beschränkten Menge M eines normierten linearen Raumes E können wir zeigen, daß es für M stets eine bestmögliche n-Überdeckung gibt, die aus geometrisch vollständigen Mengen besteht (zur Definition einer bestmöglichen n-Überdeckung s.S.43). Da wir die geometrisch vollständigen Mengen der Banachräume $C(Q)$ durch unterhalb- und oberhalb stetige Funktionen charakterisieren können, scheint es denkbar, daß man für die Räume $C(Q)$ ein Konstruktionsverfahren entwickeln kann, das für beschränkte, nicht leere Mengen $M \subset C(Q)$ eine bestmögliche n-Überdeckung liefert.

Weitere Aussagen über die Feinstruktur konvexer Körper sowie über deren Zerlegbarkeit benötigt man, wenn man die Existenz von Fixpunkten mengenwertiger Abbildungen untersucht, wie wir dies in § 5 machen. So zeigen wir den folgenden Fixpunktsatz für mengenwertige nicht expansive Abbildungen in Hilberträumen, der ein neues Ergebnis liefert (s. §5 Bem.(3)):

> Es sei E ein Hilbertraum, $M \subset E$ ein konvexer Körper, $\mathfrak{K}_{ow}(M)$ die Menge aller konvexer Körper $N \subset M$, $\mathfrak{M}_e$ die Menge aller endlichdimensionalen konvexen Körper $N \subset M$ und $\mathfrak{M}_s$ die Menge aller symmetrischen konvexen Körper $N \subset M$.
> Ist $T : M \longrightarrow \mathfrak{K}_{ow}(M)$ eine mengenwertige nicht expansive Abbildung, die einer der folgenden Bedingungen
>
> (i) $T(M) \subset \mathfrak{M}_e$,
>
> (ii) $T(M) \subset \mathfrak{M}_s$,

genügt, dann hat T einen Fixpunkt in M; d.h. es existiert ein $x \in M$ mit $x \in T(x)$

Dabei heißt eine Abbildung $T : M \longrightarrow \mathfrak{K}_m(M)$ eine mengenwertige nicht expansive Abbildung, wenn für alle $x,y \in M$ die Ungleichung

$$d_H(T(x), T(y)) \leq \|x - y\|$$

gilt; d_H bezeichnet die Hausdorffmetrik auf $\mathfrak{K}_m(M)$ (s. §5).

Ein konvexer Körper $M \subset E$ heißt symmetrisch, wenn es ein $x \in M$ gibt, so daß für alle $\lambda \in [-1,+1]$ und $y \in M$

$$\lambda(y - x) + x \in M$$

gilt.

Dieser Fixpunktsatz ist eine Erweiterung des Browderschen Fixpunktsatzes [7,Th.1] nicht expansiver Abbildungen von M in sich auf mengenwertige nicht expansive Abbildungen.

Dem Beweis dieses Satzes läßt sich noch nicht entnehmen,

1) ob auf die zusätzliche Forderung $T(M) \subset \mathfrak{M}_e$ bzw. $T(M) \subset \mathfrak{M}_s$ verzichtet werden kann, 2) oder ob sich $\mathfrak{M}_e$ (bzw. $\mathfrak{M}_s$) durch andere Klassen spezieller konvexer Körper ersetzen läßt. Eine andere hierbei auftretenden offenen Frage ist die nach der punktweisen Zerlegbarkeit von mengenwertigen Abbildungen (s. §5) .

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof.Dr.B.Brosowski bedanken, der mir die Anregung zu dieser Arbeit gab und mich durch Diskussionen und Hinweise bei der Fertigstellung der Arbeit unterstützte.

Herrn Prof.Dr.J.Werner danke ich für die Übernahme des Korreferats.

§ 1 Grundlagen

In diesem Paragraphen stellen wir einige Begriffe, Bezeichnungen und Sätze zusammen, die wir im Laufe dieser Arbeit verwenden werden.
Für die mengenalgebraischen Verknüpfungsrelationen werden die folgenden Zeichen benutzt:

$A \cap B$ bzw. $\bigcap_{\iota \in I} A_\iota$ für den Durchschnitt und

$A \cup B$ bzw. $\bigcup_{\iota \in I} A_\iota$ für die Vereinigung der Mengen A und B bzw. A_ι, $\iota \in I$,

$A \setminus B$ für die Differenzmenge $\{x \in A : x \notin B\}$, sowie
$A \times B$ für das kartesische Produkt $\{(x,y) : x \in A, y \in B\}$ von A und B.

Sind A,B zwei Teilmengen eines reellen Vektorraumes L, $x \in L$ und $r \in \mathbb{R}$, dann setzen wir:

$$A + B := \{x + y : x \in A, \ y \in B\} ,$$

$$A + x := A + \{x\}$$

$$r A := \{r x : x \in A\} , \quad - A := (-1)A ,$$

$$\operatorname{con}(A) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{\substack{\sum_{i=1}^{n} r_i = 1 \\ r_i \in [0,1]}} (r_1 A + \ldots + r_n A)$$

Die Menge $A + B$ heißt die Minkowskische Summe von A und B und $\operatorname{con}(A)$ die konvexe Hülle von A. A heißt konvex, wenn $\operatorname{con}(A) = A$.

Ist der Vektorraum L mit einer topologischen Struktur versehen, so wird die konvexe abgeschlossene Hülle von $A \subset L$ definiert durch:

$$\overline{\operatorname{con}}(A) := \overline{\operatorname{con}(A)}.$$

In den topologischen Begriffen halten wir uns an die Lehrbücher von Bourbaki [4] , [5] . Sind $+\infty$, $-\infty$ zwei verschiedene, nicht zu $\mathbb{R}$ gehörende Symbole, dann bezeichnet man die Menge, die aus $\mathbb{R}$ durch Adjunktion von $+\infty$, $-\infty$ hervorgeht, mit $\overline{\mathbb{R}}$. Die Ordnungsstruktur von $\mathbb{R}$ läßt sich auf $\overline{\mathbb{R}}$ erweitern, indem man für alle $r \in \mathbb{R}$ $-\infty < r < +\infty$ und $-\infty < +\infty$ setzt. $\overline{\mathbb{R}}$ ist somit eine linear geordnete Menge, deren Ordnungsstruktur auf $\overline{\mathbb{R}}$ eine Topologie induziert, die auf $\mathbb{R}$ mit der üblichen Topologie übereinstimmt.

$\overline{\mathbb{R}}$, versehen mit der oben definierten Ordnung und Topologie, heißt vervollständigte Zahlengerade (s. [4, Chap. 4, § 4, No. 2]).

$\overline{\mathbb{R}}$ ist ein kompakter Hausdorffraum.

Die Addition kann nach jeweils einer der beiden Mengen $[-\infty, +\infty) \times [-\infty, +\infty)$, $(-\infty, +\infty] \times (-\infty, +\infty]$ durch die folgenden Formeln stetig fortgesetzt werden:

$$x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty \qquad (x \neq -\infty)$$

$$x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty \qquad (x \neq +\infty)$$

(s. [4, Chap. 4, § 4, Prop. 7]).

Wir werden nur die Fortsetzung nach $(-\infty, +\infty] \times (-\infty, +\infty]$ benötigen. $\overline{\mathbb{R}}^* := \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$. Die Multiplikation läßt sich durch die folgenden Formeln stetig nach $\overline{\mathbb{R}}^* \times \overline{\mathbb{R}}^*$ fortsetzen:

$$x(+\infty) = (+\infty)x = \begin{cases} +\infty & x > 0 \\ -\infty & x < 0 \end{cases} \quad \text{falls}$$

$$x(-\infty) = (-\infty)x = \begin{cases} -\infty & x > 0 \\ +\infty & x < 0 \end{cases} \quad \text{falls}$$

(s. [4, Chap. 4, § 4, Prop. 8]).

Für das Produkt $x \cdot y$, falls $x = 0$ und $y = +\infty$, vereinbaren wir folgendes:

$$0 \cdot (+\infty) := 0.$$

Ferner bezeichnen wir stets mit:

E einen nomierten linearen Raum über $\mathbb{R}$,

E' den linearen Raum aller stetigen reellwertigen linearen Funktionale auf E , der, mit der üblichen Norm versehen, ein Banachraum ist;

$$U := \{x \in E : \|x\| \leq 1\} \quad , \quad U' := \{x' \in E' : \|x'\| \leq 1\},$$

$$S := \{x \in E : \|x\| = 1\} \quad , \quad S' := \{x' \in E' : \|x'\| = 1\}.$$

U bzw. U' heißt Einheitskugel in E bzw. E' und

S bzw. S' Einheitssphäre in E bzw. E'.

Allgemein verstehen wir unter einer Kugel mit dem Mittelpunkt $x \in E$ und dem Radius $r \geq 0$ die Menge $r\,U + x$.
Alle Elemente und Teilmengen des Dualraumes E' kennzeichnen wir mit einem Strich " ' ".

Aussagen topologischer Natur über Teilmengen von E bzw. E' beziehen sich auf die Normtopologien von E bzw. E'; werden andere Topologien auf E und E' betrachtet, so wird dieses an den betreffenden Stellen explizit angegeben; wie z.B.:

Es sei A eine Teilmenge von E, dann setzen wir:

$\mathfrak{P}(A)$ die Potenzmenge von A,

$$\mathfrak{G}_0(A) := \{B \in \mathfrak{P}(A) : B \neq \emptyset,\ B \text{ ist } \sigma(E,E') \text{ - abgeschlossen}\} ,$$

$$\mathfrak{K}_{con}(A) := \{B \in \mathfrak{G}_0(A) : \quad B = con(B)\} ,$$

$$\mathfrak{K}^b_{con}(A) := \{B \in \mathfrak{K}_{con}(A) : \quad B \text{ ist beschränkt}\} .$$

Es sei daran erinnert, daß der Abschluß einer konvexen Menge unabhängig von der gewählten Topologie des dualen Paares $\langle E,E' \rangle$ ist.

Die Elemente von $\mathfrak{K}^b_{om}(E)$ heißen konvexe Körper. Hat ein konvexer Körper einen inneren Punkt, dann soll er zur besonderen Betonung Eikörper genannt werden.

Der Begriff des konvexen Körpers ist in der Literatur nicht einheitlich gefaßt; einige Autoren (z.B.[5, Chap. 2, p. 72]) verstehen unter einem konvexen Körper eine abgeschlossene konvexe Menge mit inneren Punkten. Die obige Definition ist im Hinblick auf einen verallgemeinerten Blaschkeschen Auswahlsatz (s. § 3) getroffen und erweist sich dort als sinnvoll.

$\mathfrak{T}(\mathfrak{S}(E,E'))$ bezeichne die gröbste Topologie auf $\mathfrak{O}_o(E)$, in der für alle $\mathfrak{S}(E,E')$ - offenen Mengen V $\mathfrak{O}_o(V)$ offen und $\mathfrak{O}_o(E \setminus V)$ abgeschlossen ist.

$\mathfrak{T}((\mathfrak{S}(E,E'))$ heißt die Vietoristopologie auf $\mathfrak{O}_o(E)$.

Die Bezeichnung für den topologischen Raum $(\mathfrak{O}_o(E), \mathfrak{T}(\mathfrak{S}(E,E')))$ kürzen wir ab mit $\mathfrak{O}_o(E)$.

Die Eigenschaften der Vietoristopologie, die wir im Rahmen dieser Arbeit benötigen, haben wir in einem Anhang zusammengestellt, auf den an den entsprechenden Stellen verwiesen wird.

Ist $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{O}_o(E)$, dann heißt eine Abbildung

$F : \mathfrak{M} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ stetig, wenn F als Abbildung des topologischen Raumes $(\mathfrak{M}, \mathfrak{T}(\mathfrak{S}(E,E')) \mid \mathfrak{M})$ in $\bar{\mathbb{R}}$ stetig ist.

Nach diesen Vorbereitungen können wir mit dem Studium spezieller Abbildungen auf $\mathfrak{K}_{om}(E)$ bzw. $\mathfrak{K}^b_{om}(E)$ beginnen.

Die Abbildung $H : E' \times \mathcal{O}_0(E) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$

wird definiert durch:

$$H(x',A) := \sup_{a \in A} \langle a,x' \rangle \quad , \quad (x',A) \in E' \times \mathcal{O}_0(E).$$

Ist $A \in \mathcal{O}_0(E)$ fest gewählt, dann wird durch $x' \longmapsto (x',A)$ $(\forall\, x' \in E')$ eine Abbildung von E' in $E' \times \mathcal{O}_0(E)$ erklärt, die wir mit i_A bezeichnen.
Eine bekannte Folgerung aus dem Satz von Hahn-Banach besagt, daß die konvexe abgeschlossene Hülle einer Menge aus E gleich dem Durchschnitt aller sie enthaltenen abgeschlossenen Halbräume ist. Somit gilt für alle $A \in \mathcal{O}_0(E)$

$$(1) \quad \overline{\text{con}}(A) = \{x \in E : \langle x,x' \rangle \leq H \circ i_A(x') \ \forall\, x' \in E'\}$$

Aus (1) erhält man für beliebige $A,B \in \mathcal{O}_0(E)$ die Implikation:

$$H \circ i_A = H \circ i_B \longrightarrow \overline{\text{con}}(A) = \overline{\text{con}}(B);$$

d.h. die Abbildung $A \longrightarrow H \circ i_A$ ist auf $\mathcal{K}_w(E)$ injektiv.

Man definiert daher:
Die zu $A \in \mathcal{K}_w(E)$ gehörende Abbildung $H \circ i_A : E' \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ heißt die Stützfunktion von A.

Sofern keine Verwechslungen zu befürchten sind, setzen wir:

$H(\cdot,A)$ für $H \circ i_A$

und analog hierzu

$H(x',\cdot)$ für $H \circ i_{x'}$

wobei $i_{x'}$ für ein festes $x' \in E'$ die Abbildung bezeichnet, die durch $A \longmapsto (x',A)$ $(\forall\, A \in \mathcal{O}_0(E))$ definiert wird.

Bevor wir die Eigenschaften der Stützfunktion weiter untersuchen, geben wir eine modifizierte Fassung von (1) für konvexe Körper an, die wir später verwenden wollen.

1.1 Es sei $D' \subset S'$ eine in S' dichte Teilmenge und
=== $A \in \mathcal{K}^b_\sigma(E)$. Es gilt:

$$A = \{x \in E : \langle x,x' \rangle \leq H(x',A) \ \forall\ x' \in D'\}.$$

Beweis: Setze:

$$B := \{x \in E : \langle x,x' \rangle \leq H(x',A),\ x' \in D'\}.$$

Da stets $A \subset B$ gilt, wähle daher ein $x \in E \setminus A$.

Nach dem Trennungssatz von Hahn-Banach [5, Chap. 2, § 3, No. 2, Prop. 4] existiert ein $y' \in S'$, das x und A strikt trennt. Wähle $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, so daß $\langle x,y' \rangle - 3\varepsilon \geq H(y',A)$.

$\delta := \max \{1, \sup \{ \|a\| : a \in A\}\}$.

Wegen

$$\|x\| = \sup_{x' \in S'} \langle x,x' \rangle = \sup_{x' \in D'} \langle x,x' \rangle \qquad (\forall x \in E)$$

gilt für alle $b \in B$ $\|b\| \leq \delta$.

Da D' dicht in S' ist, existiert ein $x' \in D'$ mit $\|x' - y'\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}$.

Damit gilt für alle $b \in B$ die Ungleichung:

$$|\langle b, x' - y' \rangle| \leq \|b\| \, \|x' - y'\| \leq \varepsilon \ ;$$

und somit ist für alle $a \in A$ $(\subset B)$:

$$\langle a,x' \rangle \leq \langle a,y' \rangle + \varepsilon \leq \langle x,y' \rangle - 2\varepsilon \leq \langle x,x' \rangle - \varepsilon \ ;$$

d.h. $H(x',A) < \langle x,x' \rangle$ oder äquivalent hierzu $x \notin B$. ∎

Bemerkung:

(1) Ist E insbesondere separabel, dann existiert eine in S' abzählbar dichte Teilmenge $D' = \{x'_i : i \in \mathbb{N}\}$, und für jeden konvexen Körper $A \in \mathcal{K}^b_\sigma(E)$ gilt

$$A = \{x \in E : \langle x,x'_i \rangle \leq H(x'_i,A) \ , \ i \in \mathbb{N}\}.$$

Der Begriff der Stützfunktion ist für konvexe Körper des n-dimensionalen euklidschen Raumes von Minkowski([1]) eingeführt worden und hat eine große Bedeutung in der Theorie der konvexen Körper des euklidschen Raumes erhalten. Viele Probleme, die sich bei der Untersuchung von konvexen Körpern ergeben, können mit Hilfe der Stützfunktion einfacher formuliert und bewiesen werden, als dies in einer rein deskriptiven Geometrie möglich ist (s. z.B.[3] , [29]).
Hörmander hat 1951 in [20] die Eigenschaften der Stützfunktion konvexer, abgeschlossener, nicht leerer Mengen eines reellen lokal-konvexen Raumes Y untersucht. Ein wichtiges Resultat [20, Th. 5] besteht in einer Charakterisierung derjenigen Abbildungen des Dualraumes Y' in $\bar{\mathbb{R}}$, die Stützfunktionen konvexer abgeschlossener, nicht leerer Mengen aus Y sind. Dieses Ergebnis hat vielfache Anwendungen gefunden, z.B. in der neueren Entwicklung der Integration mengenwertiger Abbildungen (s. z.B. Valadier [35], Wegmann[37]). Wir werden für sein Resultat einen modifizierten Beweis geben. Doch zuvor benötigen wir einige Eigenschaften der Stützfunktion.

1.2 Es seien $M, N, M_\iota \in \mathfrak{K}_{on}(E)$, $\iota \in I$.

Dann gilt:

(a) $H(\cdot,M) > -\infty$;

(b) $H(\cdot,M) < +\infty \iff M \in \mathfrak{K}^b_{on}(E)$;

(c) $H(x'+y', M) \overset{(2)}{\leq} H(x',M) + H(y',M)$ für alle $x',y' \in E'$;

(d) $H(r x',M) \overset{(3)}{=} r\, H(x',M)$ für alle $x' \in E'$, $r \geq 0$;

([1]) Literaturangabe s. [3, p. 25].
([2]) Die Addition ist nach (a) definiert.
([3]) Mit der getroffenen Konvention $0(+\infty) = 0$.

(e) $H(\cdot,M) \leq H(\cdot,N) \iff M \subset N$;

(f) $H(\cdot,\overline{rM + sN}) \overset{(1)}{=} rH(\cdot,M) + sH(\cdot,N)$

für alle $r,s \geq 0$;

(g) $H(x',M) = H(-x',-M)$ für alle $x' \in E'$;

(h) $H(\cdot,\overline{\text{con}}\,(\bigcup_{\iota \in I} M_\iota)) = \sup_{\iota \in I} H(\cdot,M_\iota)$.

Beweis: Die Beweise sind einfach, man findet sie z.B. in [20].∎

Es sei L ein reeller Vektorraum und f eine Abbildung von L in $\overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\}$. Dann heißt f

- konvex , wenn für alle $r \in (0,1)$ und $x,y \in L$

$f(rx + (1-r)y) \leq rf(x) + (1-r)\,f(y)$,

- subadditiv, wenn für alle $x,y \in L$

$f(x+y) \leq f(x) + f(y)$,

- positiv homogen, wenn für alle $r \in [0, +\infty)$ und $x \in L$

$f(rx) \overset{(1)}{=} r\,f(x)$.

Insbesondere ist jede positiv homogene und subadditive Abbildung konvex. In 1.2(a) - (c) ist aufgezeigt, daß jede Stützfunktion positiv homogen und subadditiv ist.
Per def. ist jede Stützfunktion bezüglich jeder polaren Topologie auf E' unterhalbstetig, denn das Supremum einer Familie von stetigen Funktionen eines topologischen Paares in $\mathbb{R}$ ist unterhalbstetig. Nach Hörmander [20,Th.5] ist jede $\sigma(E',E)$ - unterhalbstetige, positiv homogene und

---

(1) Mit der getroffenen Konvention $0 \cdot (+\infty) = 0$!

subadditive Abbildung $F : E' \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\}$ eine Stützfunktion. Zum Beweis dieses Satzes benötigt Hörmander im wesentlichen die Aussage, daß der Dualraum von E' bezüglich der $G(E',E)$ - Topologie E ist. Somit läßt sich der Satz von Hörmander mit Hilfe des Mackeyschen Satzes [5,Chap.4,§2,Th.2] wie folgt angeben:

1.3 === Es sei F eine Abbildung von E' in $\overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\}$ und γ eine lokalkonvexe Topologie auf E', die feiner als die $G(E',E)$ -Topologie und gröber als die Mackeysche Topologie $\tau(E',E)$ ist. Dann gilt:

F ist genau dann eine Stützfunktion, wenn
F positiv homogen, subadditiv und bzgl. γ unterhalbstetig ist.

Bemerkung:

(2) Ist E reflexiv, dann ist $\tau(E',E) = \beta(E',E)$, und es gilt:

Eine positiv homogene und subadditive Abbildung $F : E' \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\}$ ist genau dann eine Stützfunktion, wenn F unterhalbstetig ist.

(3) Es sei $M \in \mathfrak{K}_{om}(E)$.
Ist M ein konvexer Körper, dann ist die Stützfunktion von M Lipschitzstetig mit der Lipschitzkonstanten
$c := \sup \{ \|m\| : m \in M \}$.
Der Beweis der Lipschitzstetigkeit ergibt sich aus der folgenden Ungleichung:

$H(x',M) - H(y',M) \leq H(x'-y',M) \leq c \, \|x'-y'\| \quad (\forall\, x', y' \in E')$,

damit ist $|H(x',M) - H(y',M)| \leq c \, \|x'-y'\| \quad (\forall\, x', y' \in E')$

Ist umgekehrt die Stützfunktion von M stetig, dann ist $H(\cdot,M) < +\infty$ und nach 1.2 ist M beschränkt.
Zusammen mit 1.3 haben wir für Stützfunktionen konvexer Körper eines reflexiven Banachraumes den folgenden Charakterisierungssatz gewonnen:

1.4 Es sei E ein reflexiver Banachraum und F eine Abbildung
=== von E' in $\mathbb{R}$.

F ist Stützfunktion eines konvexen Körpers genau dann, wenn F positiv homogen, subadditiv und stetig ist.

Bemerkung:

(4) Ist E endlich dimensional, dann ist jede konvexe Funktion $F : E' \longrightarrow \mathbb{R}$ und speziell jede positiv homogene und subadditive Funktion $F : E' \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig (s. [5, Chap. 2, § 5, No. 2, Cor. 2]). Damit erweist sich der Charakterisierungssatz der Stützfunktionen konvexer Körper des n-dimensionalen euklidschen Raumes (s. z.B. [3, p. 26] als Spezialfall von 1.4.

Von Wegmann [37] übernehmen wir die Formel für die Stützfunktion des Durchschnittes abgeschlossener konvexer Mengen:

1.5 Es seien $M_\iota \in \mathfrak{K}_m(E)$ und $H_\iota := H(\cdot, M_\iota)$ $(\forall \iota \in I)$.
=== $M := \bigcap_{\iota \in I} M_\iota$. Die Abbildungen $F : E' \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ und $\underline{F} : E' \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ werden definiert durch:

$$F(x') := \inf\{\sum_{\nu=1}^{n} H_{\iota_\nu}(x'_\nu) : \iota_\nu \in I, n \in \mathbb{N}, x'_\nu \in F' \text{ mit } \sum_{\nu=1}^{n} x'_\nu = x'\} ,$$

$$\underline{F}(x') := \liminf_{y' \to x'} F(y') \qquad (\forall x' \in F') ,$$

wobei der limesinferior bezüglich der $\sigma(E',E)$-Topologie zu nehmen ist.

(a) Ist $M \neq \emptyset$, dann ist die Stützfunktion von M gleich $\underline{F}$, und es gelten die Ungleichungen:

$$H(\cdot,M) = \underline{F} \leq F \leq H_\iota \qquad (\forall_\iota \in I)$$

(b) Ist E zudem reflexiv und eine der konvexen Mengen M_ι ein konvexen Körper, dann ist $F = \underline{F}$.

Beweis: (a) s. [37, S.2.4] .

(b) Es sei $M_{\iota_o} \in \tilde{\mathcal{K}}_{om}^{b}(E)$, $r := \sup\{\|m\| : m \in M_{\iota_o}\}$.

Wegen $|H_{\iota_o}| \leq r\,\|\cdot\|$ (s.Bem.(3)) und Teil (a) gilt

$$-r\|x'\| \leq -H_{\iota_o}(-x') \leq -F(-x') \overset{(1)}{\leq} F(x') \leq H_{\iota_o}(x') \leq r\|x'\| \ ;$$

d.h. F ist stetig und nach 1.4 Stützfunktion. Somit ist $F = \underline{F}$.

Die Abbildung F aus 1.5 heißt Faltung der Stützfunktionen H_ι ;

$$\overset{*}{I} H_\iota(x') := \inf\{\sum_{\nu=1}^{n} H_{\iota_\nu}(x'_\nu) : \iota_\nu \in I,\ n \in \mathbb{N}, x'_\nu \in E' \text{ mit } \sum_{\nu=1}^{n} x'_\nu = x'\} .$$

Die Abbildung $\underline{F}$ aus 1.5 heißt ($\sigma(E';F)$-)unterhalbstetige Regularisierung von F.

Bemerkung:

(5) Die Definition der Faltung ist dem Buch von Rockafellar [29] entnommen; dort wird die Faltung konvexer Funktionen auf dem n-dimensionalen euklidischen Raum analog erklärt. Zur Motivation dieser Begriffsbildung siehe [29].

---

(1) Für F gilt stets: $0 = F(\theta') \leq F(x') + F(-x')$ $(\forall x' \in E')$.

Von Dierolf [11] übernehmen wir:

1.6 $\mathfrak{K}_{\sigma m}(E)$ ist abgeschlossen in $\mathcal{O}_0(E)$

Beweis: s. [11, Satz 2.8] .

Bemerkung:

(6) Ist A eine nicht leere, schwach abgeschlossene Teilmenge[1] von E, dann ist $\mathfrak{K}_{\sigma m}(A) = \mathfrak{K}_{\sigma m}(E) \cap \mathcal{O}_0(A)$ nach 1.6 und A.2 abgeschlossen in $\mathcal{O}_0(E)$.

$\mathfrak{K}^b_{\sigma m}(E)$ ist jedoch nicht abgeschlossen in $\mathcal{O}_0(E)$.

1.7 Es sei $x' \in E'$. Dann ist die Abbildung

$H(x',\cdot) : \mathcal{O}_0(E) \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ stetig.

Beweis: Die Abbildung $H(\theta',\cdot)$ ist konstant, daher sei $x' \neq \theta'$. Ferner sei $M \in \mathcal{O}_0(E)$.

1) $H(x',M) = +\infty$.

Es sei $r \in \mathbb{R}$, dann ist $(r, +\infty]$ ein Element der Umgebungsbasis von $+\infty$ in $\bar{\mathbb{R}}$, und
$\langle E, x'^{-1}(r, +\infty)\rangle$ ist eine offene Umgebung von M in $\mathcal{O}_0(E)$.

Ist $A \in \langle E, x'^{-1}(r, +\infty)\rangle$, dann ist

$A \cap x'^{-1}(r, +\infty) \neq \emptyset$; es existiert daher ein $a \in A$, so daß $\langle a,x'\rangle > r$. Nach Definition von $H(x',A)$ gilt:

$H(x',A) > r$; d.h. $H(x',\cdot)$ bildet

$\langle E, x'^{-1}(r, +\infty)\rangle$ in $(r, +\infty]$ ab.

([1]) Die $\sigma(E,E')$ - Topologie auf E heißt auch die schwache Topologie.

2) $H(x',M) =: r \in \mathbb{R}$.

Es sei $\varepsilon > 0$, dann ist $(r-\varepsilon\ ,\ r+\varepsilon)$ ein Element der Umgebungsbasis von r in $\bar{\mathbb{R}}$.

$\langle (x'^{-1}(-\infty, r+\varepsilon),\ x'^{-1}(r-\varepsilon, r+\varepsilon)\rangle$ ist eine offene Umgebung von M in $\mathcal{O}_o(E)$. Analog zu 1) schließt man, daß $H(x',\cdot)\ \langle x'^{-1}(-\infty, r+\varepsilon)\ ,\ x'^{-1}(r-\varepsilon\ ,\ r+\varepsilon)\rangle$ in $(r-\varepsilon\ ,\ r+\varepsilon)$ abbildet.

Aus 1) und 2) erhalten wir die Aussage von 1.7. ∎

Ist $\mathcal{L}_o(E)$ die Menge aller nicht leeren, beschränkten und abgeschlossenen Teilmengen von E und d_H die Hausdorffmetrik auf $\mathcal{L}_o(E)$ ([1]), dann läßt sich $\tilde{\mathcal{K}}_{on}^{b}(E)$ als Teilraum von $\mathcal{L}_o(E)$ auffassen. Insbesondere ist $\tilde{\mathcal{K}}_{on}^{b}(E)$ in $\mathcal{L}_o(E)$ abgeschlossen.

$\tilde{\mathcal{K}}_{on}^{b}(E)_{d_H}$ bezeichne den metrischen Raum $(\tilde{\mathcal{K}}_{on}^{b}(E), d_H|\tilde{\mathcal{K}}_{on}^{b}(E)\times\tilde{\mathcal{K}}_{on}^{b}(E))$.

1.8 Sind $M, N \in \tilde{\mathcal{K}}_{on}^{b}(E)$, dann gilt:

$$d_H(M,N) = \sup_{x' \in U'} |H(x',M) - H(x',N)|$$

Beweis: Der Beweis ist einfach, man findet ihn z.B. in [20] . ∎

Bemerkung :

(7) Nach 1.8 und 1.2 d gilt:

$$|H(x',M) - H(x',N)| \leq \|x'\| \cdot d_H(M,N)$$

$$(\forall\ x' \in E') \quad (\forall\ M,N \in \tilde{\mathcal{K}}_{on}^{b}(E)) \ ;$$

d.h. die Abbildung $H(x',\cdot) : \tilde{\mathcal{K}}_{on}^{b}(E)_{d_H} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.
Damit haben wir insgesamt gezeigt, daß $H(x',\cdot)$ ($x' \in E'$ fest) bzgl. Hausdorffmetrik wie auch der Vietoristopologie auf $\tilde{\mathcal{K}}_{on}^{b}(E)$ stetig ist.

([1]) zur Def. s. Anhang!

Es sei $M \subset E$ nicht leer und $x \in E$. Die reelle Zahl

$$\operatorname{dist}(x,M) := \inf_{y \in M} \|x - y\|$$

heißt der Minimalabstand von x zur Menge M. Und allgemeiner: Sind $M, N \subset E$ nicht leer, dann heißt

$$\operatorname{dist}(N,M) = \inf_{y \in N} \operatorname{dist}(y,M)$$

der Minimalabstand der Mengen M und N.

1.9 a) Ist $M \in \tilde{\mathcal{K}}_{on}(E)$ und $x \in E$, dann gilt
===

$$\operatorname{dist}(x,M) = \sup_{x' \in U'} (\langle x,x' \rangle - H(x',M)).$$

b) Ist $x' \in E' \setminus \{\theta'\}$, $x \in E$, $r \in \mathbb{R}$ und

$$L := \{y \in E : \langle y,x' \rangle = r\} ,$$

dann ist

$$\operatorname{dist}(x,L) = \frac{1}{\|x'\|} |\langle x,x' \rangle - r| .$$

Beweis: s. z.B. Deutsch-Maserick [10, Th. 5.1, Lemma 2.1]

Bemerkung:

(8) Nach 1.9 ist für $M \in \tilde{\mathcal{K}}_{on}^{b}(E)$ und $x' \in S'$ die Größe $|H(x',M)|$ der Abstand der Hyperebene

$$\{y \in F : \langle y,x' \rangle = H(x',M)\}$$

zum Nullpunkt. Nach 1.7 und Ber. 7 ist der Abstand bzgl. der Vietoristopologie wie auch der Hausdorffmetrik auf $\tilde{\mathcal{K}}_{on}^{b}(F)$ stetig. Wir haben auf diese Weise einem konvexen Körper eine Maßzahl zugeordnet.

Im folgenden wollen wir weitere Maßzahlen auf $\tilde{\mathcal{K}}_{on}^{b}(F)$ (bzw. $\tilde{\mathcal{K}}_{on}(E)$) betrachten.

Die Abbildung $B : E' \times \mathcal{K}_{\omega}(E) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ wird definiert durch:

$$B(x',M) := H(x',M)+H(-x',M) \quad ,(x',M) \in E' \times \mathcal{K}_{\omega}(E).$$

$B(x',M)$ heißt die Breite von M bzgl. x'.

Die Abbildung $B \circ i_A$ ($A \in \mathcal{K}_{\omega}(E)$ fest) bzw. $H \circ i_{x'}$ ($x' \in E'$ fest) bezeichnen wir (analog zu $H \circ i_A$) und $H \circ i_{x'}$) mit

$$B(\cdot,A) \qquad \text{bzw. } B(x',\cdot) .$$

Bemerkung:

(9) Wegen

$$H(x',M)+H(-x',M) \geq H(\theta',M) = 0 \qquad \text{(s.1.2)}$$

gilt für alle $M \in \mathcal{K}_{\omega}(E)$ und $x' \in E'$

$$B(x',M) \geq 0.$$

Durch die Zuordnung $M \longmapsto \sup_{x' \in U'} B(x',M)$ $(\forall\, M \in \mathcal{K}_{\omega}(E))$ wird eine Abbildung von $\mathcal{K}_{\omega}(E)$ in $[0, +\infty]$ definiert, die wir mit $\underline{B}$ bezeichnen.

$\underline{B}(M)$ heißt die Breite von $M \in \mathcal{K}_{\omega}(E)$.

Ist $A \subset E$ nicht leer, dann heißt

$$\operatorname{diam}(A) := \sup_{x,y \in A} \|x-y\|$$

der Durchmesser von A.

Insbesondere gilt : $\operatorname{diam}(\overline{\operatorname{con}}(A)) = \operatorname{diam}(A)$.

1.10 ==== (a) Ist $x' \in E'$, dann ist die Abbildung $B(x',\cdot): \mathcal{K}_{\omega}(E) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ stetig.

(b) $|\underline{B}(M) - \underline{B}(N)| \leq 2\, d_H(M,N) \qquad (\forall\, M,N \in \mathcal{K}^b_{(m)}(E))$.

(c) Für alle $M \in \mathcal{K}_{(m)}(E)$ gilt

$$B(x',M) = \sup_{x,y \in M} |\langle x-y,\, x'\rangle| \qquad (\forall\, x' \in E'),$$

$$\underline{B}(M) = \operatorname{diam}(M) .$$

Beweis: (a) folgt aus der Definition der Breite (bzgl. x') und 1.7.

(b) Ist $x' \in U'$ und sind M,N konvexe Körper, dann gilt

$$\begin{aligned} B(x',M) &= B(x',N) + H(x',M) - H(x',N) \\ &\quad + H(-x',M) - H(-x',N) \\ &\leq B(x',N) + 2\, d_H(M,N) \quad ; \end{aligned}$$

(1.8)

somit haben wir die Ungleichung

$$\underline{B}(M) \leq \underline{B}(N) + 2\, d_H(M,N)$$

gezeigt. Aus der Vertauschung von M mit N erhalten wir (b).

(c) Ist $x' \in E'$ und $M \in \mathcal{K}_{(m)}(E)$, dann gilt

$$\sup_{x,y \in M} |\langle x-y,\, x'\rangle| = \max\left\{ \begin{array}{l} \sup\limits_{x,y \in M} \langle x-y,\, x'\rangle \\ \sup\limits_{x,y \in M} \langle x-y, -x'\rangle \end{array} \right\}$$

$$= \max\left\{ \begin{array}{l} H(x',\ \overline{M-M}) \\ H(-x',\ \overline{M-M}) \end{array} \right\} .$$

Wegen

$$H(x',\overline{M-M}) = H(x',M) + H(-x',M) \qquad \text{(s. 1.2)}$$

gilt

$$B(x',M) = \sup_{x,y \in M} |< x - y , \quad x' >| \quad .$$

Aus

$$\operatorname{diam}(M) = \sup_{x,y \in M} \sup_{x' \in U'} |< x - y, \quad x' >|$$

$$= \sup_{x' \in U'} \sup_{x,y \in M} |< x-y,x'>| = \sup_{x' \in U'} B(x',M)$$

$$= \underline{B}(M)$$

folgt (c). ∎

Bemerkung:

(10) Ist $M \in \mathcal{K}_{\sigma}(E)$, dann ist $B(\cdot,M)$ die Stützfunktion der konvexen Menge $\overline{M-M}$ (s. Beweis zu 1.10 c).

Ist M ein konvexer Körper, $x' \in S'$,

$L_+ := \{y \in E : <y,x'> = H(x',M)\}$ und

$L_- := \{y \in E : <y,x'> = - H(-x',M)\}$,

dann gilt

$$\operatorname{dist}(L_+,L_-) = \inf_{y \in L_+} | < y,x' > + H(-x',M)|$$

$$= | H(x',M) + H(-x',M)|$$

$$= B(x',M) \qquad \text{(s. Bem. (8));}$$

d.h. $B(x',M)$ ist das Maß für den Abstand der beiden parallelen Hyperebenen, die M einschließen.
Diese letzte Aussage könnte man zur Definition der Breite eines konvexen Körpers bzgl. x' verwenden, wie dies beispielsweise in [3, p. 51] für konvexe Körper des n-dimensionalen euklidschen Raumes gemacht wird.

Die Abbildung $D : \mathcal{K}_m(E) \longrightarrow [0, +\infty)$

wird durch

$$D(M) := \inf_{x' \in S'} B(x', M) \quad , \quad M \in \mathcal{K}_m(E) \, ,$$

definiert. $D(M)$ heißt die Dicke von M.

Bemerkung:

(11) Wie in 1.10 kann man zeigen, daß für alle konvexen Körper $M, N \subset E$ die Ungleichung

$$|D(M) - D(N)| \leq 2 \, d_H(M,N) \qquad \text{gilt.}$$

Mit Hilfe der Breite und Dicke können wir eine spezielle Klasse von konvexen Körpern definieren:

Ein konvexer Körper $M \subset E$ ist von konstanter Breite, wenn

$$\underline{B}(M) = D(M) \qquad \text{gilt.}$$

Konvexe Körper, die von konstanter Breite sind, bezeichnen wir im folgenden als Körper konstanter Breite.

Offenbar ist ein konvexer Körper $M \subset E$ genau dann von konstanter Breite, wenn für alle $x' \in S'$

$$B(x', M) = \underline{B}(M)$$

gilt.
Alle Kugeln in E sind von konstanter Breite. Weitere Beispiele sind für Körper konstanter Breite sind in § 4 angegeben.

$\mathcal{K}_o(E)$ bezeichne die Menge aller nicht leeren und beschränkten Teilmengen von E.

Ist $A \in \mathcal{K}_o(E)$ und $x \in E$, dann heißt

$$\rho(x, A) := \sup_{a \in A} \|x - a\|$$

der weiteste Abstand des Punktes x zur Menge A.

Die Abbildungen R_Y , $r : \mathfrak{N}_o(E) \longrightarrow [0, +\infty)$

werden definiert durch:

$$R_Y(A) := \inf_{y \in Y} \inf \{s > 0 : y + sU \supset A\},$$

$$r(A) := \sup_{a \in A} \sup \{s \geq 0 : m + sU \subset A\},$$

$$A \in \mathfrak{N}_o(E).$$

Falls $Y = E$ ist, setzen wir : $R := R_Y$.

$R(A)$ heißt der Unkugelradius von A und
$r(A)$ heißt der Inkugelradius von A, $A \in \mathfrak{N}_o(E)$.

Bemerkung:

(12) Für alle $A \in \mathfrak{N}_o(E)$ gilt:

$$\rho(x,A) = \rho(x, \overline{\text{con}}(A)) \qquad (\forall\, x \in E),$$

$$R_Y(A) = R_Y(\overline{\text{con}}\,(A)) \quad \text{und}$$

$$r(A) \leq r(\overline{\text{con}}\,(A)) \ .$$

Der Beweis dieser Aussagen ist einfach.

1.11 Es seien $M,N \in \bar{\mathfrak{K}}^b_m(E)$. Dann gilt:

(a) $\rho(x,M) = d_H(\{x\}, M) = \sup_{x' \in U'} H(x', M-x)$

$(\forall\, x \in E)$;

(b) $R_Y(M) = \inf_{y \in Y} \rho(y,M)$

$= \inf_{y \in Y} \sup_{x' \in U'} H(x', M-y)$;

(c) $r(M) = \sup_{x \in M} \inf_{m \in \mathrm{rd}\, M} \|m - x\|$

$= \sup_{m \in M} \inf_{x' \in S'} H(x', M-m)$,

wobei $\mathrm{rd}\, M$ den Rand von M bezeichnet ;

(d) $|R_Y(M) - R_Y(N)| \leq d_H(M,N)$,

$|r(M) - r(N)| \leq 2\, d_H(M,N)$;

(e) $0 \leq r(M) \leq \frac{1}{2} D(M) \leq \frac{1}{2} \underline{B}(M) \leq R(M) \leq \underline{B}(M)$.

Beweis: (a) Nach der Definition der Hausdorffmetrik ist

$$d_H(\{x\}, M) = \max\{ \mathrm{dist}(x,M) , \sup_{m \in M} \mathrm{dist}(m,\{x\}) \}$$

$$= \rho(x,M) \qquad (\forall\, x \in E) .$$

Wegen

$$\sup_{m \in M} \sup_{x' \in U'} \langle m-x, x' \rangle = \sup_{x' \in U'} \sup_{m \in M} \langle m-x, x' \rangle$$

gilt $\rho(x,M) = \sup_{x' \in U'} H(x', M-x)$.

(b) $R_Y(M) = \inf_{y \in Y} \rho(y,M)$ folgt aus der Definition von $R_Y(M)$. Mit (a) folgt dann (b).

(c) $r(M) = \sup_{x \in M} \inf_{m \in \mathrm{rd}\, M} \|m-x\|$ erhalten wir aus der Definition von r(M).

Wegen

$$x + s\,U \subset M \qquad (s \geq 0,\ x \in M)$$

$$\overset{(1.2)}{\rightleftharpoons} \langle x,\cdot\rangle + s\,\|\cdot\| \le H(\cdot,M)$$

$$\overset{(1.2)}{\rightleftharpoons} s\,\|\cdot\| \le H(\cdot,\ M-x)$$

$$\rightleftharpoons \quad s \le \inf_{x' \in S'} H(x',\ M-x)$$

gilt

$$r(M) = \sup_{m \in M} \inf_{x' \in S'} H(x',\ M-m) \ .$$

(d) Aus

$$d_H(\{y\}),M) \le d_H(\{y\}, N) + d_H(M,N) \ ,$$

(a) und (b) erhalten wir die Ungleichung

$$R_Y(M) \le R_Y(N) + d_H(M,N) \ .$$

Mit der Vertauschung von M und N ergibt sich die erste Aussage von (d).

Für alle $x' \in S'$, $x \in M$ und $y \in N$ gilt

$$H(x',M-x) \le |H(x',M) - H(x',N)| + H(x',N-y) + |\langle x-y,\ x'\rangle|$$

$$\overset{(1.8)}{\le} d_H(M,N) + H(x',N-y) + \|x-y\| \ .$$

Insbesondere gilt für alle $x \in M$ und $y \in N$

$$\inf_{x' \in S'} H(x',\ M-x) \le \inf_{x' \in S'} H(x',N-y) + \|x-y\| + d_H(M,N)$$

Damit können wir mit (c) schließen, daß

$$r(M) \leq \inf_{x' \in S'} H(x',N-y) + \rho(y,M) + d_H(M,N) \quad (\forall\, y \in N).$$

Verwenden wir (c), dann gilt:

$$r(M) \leq r(N) + \inf_{y \in N} \rho(y,M) + d_H(M,N)$$

$$\leq r(N) + 2\, d_H(M,N) \,.$$

(A.6)

Aus der Vertauschung von M und N ergibt sich somit die Behauptung.

(e) Wegen

$$\inf_{x' \in S'} H(x',M-m) = \inf_{x' \in S'} H(-x',M-m)$$

ist

$$2 \inf_{x' \in S'} H(x',M-m) = \inf_{x' \in S'} H(x',M-m) + \inf_{x' \in S'} H(-x',M-m)$$

$$\leq \inf_{x' \in S'} [H(x',M-m) + H(-x',M-m)]$$

$$= \inf_{x' \in S'} B(x',M-m) = \inf_{x' \in S'} B(x',M).$$

Und mit (c) erhalten wir : $r(M) \leq \frac{1}{2} D(M)$.

Die restlichen Ungleichungen ergeben sich analog zur obigen. ∎

Bemerkung:

(13) Existiert ein $x \in E$ mit $\rho(x,M) = R(M)$, dann gibt es keine kleinere Kugel als $x + R(M)U$, die M enthält. Ist $x \in M$ und $\inf_{x' \in S'} H(x',M-x) = r(M)$, dann gibt es keine größere Kugel als $x + r(M)U$, die in M enthalten ist. Wir definieren daher:

Ist $M \in \mathfrak{K}_o(E)$ und $x \in E$, dann heißt $x + sU$

- Umkugel von M, wenn $s = R(M)$,
- Inkugel von M, wenn $s = r(M)$.

Die Menge der Umkugelmittelpunkte (Inkugelmittelpunkte) bezeichnen wir mit $\mathfrak{R}M$ ($\mathfrak{r}M$) .

Eine nicht leere Teilmenge M von E heißt symmetrisch bzgl. $z \in E$, wenn gilt:

$$(\forall\ |s| \leq 1)\ (\forall\ x \in M-z) \qquad sx \in M - z$$

oder äquivalent dazu:

$$(\forall\ |s| \leq 1)\ (\forall\ x \in M) \qquad z + s(x-z) \in M.$$

z heißt Symmetriepunkt von M, wenn M bzgl. z symmetrisch ist.

Ein Symmetriepunkt z von M ist stets aus M. Eine Menge kann mehr als einen Symmetriepunkt besitzen.

1.12 Es sei M ein konvexer Körper, $z \in E$ und $D' \subset S'$ dicht in S'. Dann gilt:

(a) M ist genau dann bzgl. z symmetrisch, wenn für alle $x' \in D'$

$$H(x',M) - H(-x',M) = 2 < z,x' > .$$

(b) Ist M bzgl. z symmetrisch, dann ist z eindeutig bestimmt.

(c) Ist M symmetrisch bzgl. z, dann hat M eine Umkugel und eine zur Umkugel konzentrische Inkugel mit dem Mittelpunkt z, und es gilt:

$$R(M) = \frac{1}{2}\ \underline{B}(M) = \sup_{m \in M} \|m - z\| ,$$

$$r(M) = \frac{1}{2}\,\underline{D}(M) = \inf_{m \in \mathrm{rd}\,M} \|m - z\| \quad ,$$

wobei $\mathrm{rd}\,M$ den Rand von M bezeichnet.

Beweis: (a) M ist symmetrisch bzgl. z

$$\rightleftharpoons \quad (M-z) = -(M-z)$$

$$\rightleftharpoons \quad H(\cdot, M-z) = H(\cdot, -(M-z))$$

(1.2)

$$\rightleftharpoons \quad H(\cdot, M) - \langle z, \cdot \rangle = H(-\cdot, M) + \langle z, \cdot \rangle$$

(1.2)

$$H(\cdot, M) - H(-\cdot, M) = 2 \langle z, \cdot \rangle \quad .$$

Aus der Stetigkeit der Stützfunktion $H(\cdot, M)$ folgt dann die Aussage (a).

(b) Die Eindeutigkeit des Symmetriepunktes entnimmt man aus (a).

(c) Wegen

$$H(\cdot, M-z) = H(-\cdot, M-z)$$

ist

$$H(\cdot, M-z) = \frac{1}{2}\, B(\cdot, M-z) = \frac{1}{2}\, B(\cdot, M) \quad .$$

Somit gilt

$$\frac{1}{2}\,\underline{B}(M) \le R(M) \le \sup_{x' \in U'} H(x', M-z) \le \frac{1}{2}\,\underline{B}(M) \quad .$$

(1.11 e) (1.11 b)

Analog erhalten wir:

$$\frac{1}{2}\, D(M) = \frac{1}{2}\, D(M-z) = \frac{1}{2} \inf_{x' \in S'} B(x', M-z)$$

$$= \inf_{x' \in S'} H(x', M-z) \le r(M) \le \frac{1}{2}\, D(M).$$

(1.11c) (1.11e)

Insbesondere ist $z + \frac{1}{2}\,\underline{B}(M)\,U$ Umkugel und

$z + \frac{1}{2}\,D(M)U$ Inkugel von M. ■

Als Korollar erhalten wir einen Charakterisierungssatz für Kugeln:

1.13 ==== $M \in \mathfrak{K}^{b}_{m}(E)$ ist genau dann eine Kugel mit dem Mittelpunkt x und dem Radius $s \geq 0$, wenn M bzgl. x symmetrisch und von konstanter Breite ist.

Beweis: Jede Kugel eines normierten Raumes ist bezgl. ihres Mittelpunktes symmetrisch und hat konstante Breite. Umgekehrt gilt für einen symmetrischen Körper konstanter Breite M nach 1.12, daß

$$2\,R(M) = \underline{B}(M) = D(M) = 2\,r(M) \quad . \blacksquare$$

§ 2 Geometrisch vollständige Mengen

$C(\mathbb{R})$ bezeichne den linearen Raum aller auf $\mathbb{R}$ stetigen, beschränkten und reellen Funktionen, versehen mit der Supremumsnorm. Ferner seien f und g zwei reelle Funktionen auf $\mathbb{R}$, die wie folgt definiert sind:

$$g(t) := \begin{cases} -1 & t \in \mathbb{R} \setminus (0,1) \\ -2 & t \in (0,1) \end{cases}, \quad f(t) := \begin{cases} 2 & t \in \mathbb{R} \setminus [0,1] \\ 1 & t \in [0,1] \end{cases}$$

Dann ist

$$M := \{ x \in C(\mathbb{R}) : g(t) \leq x(t) \leq f(t) , \quad t \in \mathbb{R} \}$$

ein Eikörper mit dem Durchmesser 3. M hat die Eigenschaft, daß für alle $x \in C(\mathbb{R})$ aus

$$\rho(x,M) = \sup_{m \in M} \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t) - m(t)| \leq 3$$

$x \in M$ folgt (Beweis: 3,g,f erfüllen die Voraussetzungen des Satzes 2.5 b); d.h. man kann M keinen Punkt hinzufügen, ohne den Durchmesser von M zu vergrößern. Es ist bemerkenswert, daß es außer den Kugeln Mengen in $C(\mathbb{R})$ gibt, die diese Eigenschaft haben.
Wir definieren:

Ist $M \subset E$ nicht leer und beschränkt, dann heißt M

- <u>geometrisch vollständig</u>, wenn für alle $x \in E$ aus $\rho(x,M) \leq \operatorname{diam}(M)$ $x \in M$ folgt;

- <u>diametral maximal</u>, wenn für alle Randpunkte x von M $\rho(x,M) = \operatorname{diam}(M)$ gilt.

Unter einer <u>nicht trivialen geometrisch vollständigen</u> (<u>nicht trivialen diametral maximalen</u>) Menge wollen wir stets eine geometrisch vollständige (diametral maximale) Menge verstehen, die mehr als einen Punkt enthält.

Offensichtlich gilt: Eine nicht leere beschränkte Menge $M \subset E$ ist genau dann geometrisch vollständig, wenn M keine echte Teilmenge einer Menge gleichen Durchmessers ist.
Da der Durchmesser von M gleich dem von $\overline{\text{con}}$ (M) ist, ist jede geometrisch vollständige Menge $M \subset E$ ein konvexer Körper. Insbesondere ist jede geometrisch vollständige Menge ein diametral maximaler konvexer Körper (s. 2.13 a); die Umkehrung dieser Aussage ist für beliebiges E nicht richtig (s. § 2 Bem. (8)).
Da in endlichdimensionalen Banachräumen die Eigenschaften "geometrisch vollständig" und "diametral maximal" für konvexe Körper äquivalent sind (s. § 2 Bem. (9)) nennt Eggleston (in seiner Arbeit über Körper konstanter Breite endlichdimensionaler Banachräume) [14] geometrisch vollständige Mengen diametral maximale Mengen. Andere Autoren bezeichnen die geometrisch vollständigen Mengen (des n-dimensionalen euklidschen Raumes) auch als vollständige Mengen (s. z.B. Bonnessen-Fenchel [3], Valentine [36]). Zur Abgrenzung gegenüber anderen Vollständigkeitsbegriffen haben wir uns für den Terminus "geometrisch vollständig" entschieden. Durch den Zusatz "geometrisch" soll betont werden, daß die Geometrie der Einheitskugel maßgeblichen Einfluß auf die Eigenschaften geometrisch vollständiger Mengen hat. Beispielsweise hängt die Äquivalenz der Eigenschaften "geometrisch vollständig" und "von konstanter Breite" von E ab. So ist jeder Körper konstanter Breite geometrisch vollständig (s. 2.1); die Umkehrung dieser Aussage ist i.a. nicht richtig. Eggleston [14] hat Beispiele von geometrisch vollständigen Mengen nicht konstanter Breite in endlichdimensionalen Banachräumen angegeben. Wir geben hierfür Beispiele in unendlichdimensionalen Banachräumen (s. 2.5). Dagegen gibt es andere Eigenschaften geometrisch vollständiger Mengen, die unabhängig von der speziellen Wahl von E sind. So zeigt Eggleston [14] , daß ein konvexer Körper $M \subset E$ genau dann geometrisch vollständig ist, wenn M gleich dem Durchschnitt aller Kugeln $m + \text{diam}(M)\ U\ (m \in M)$ ist (der angegebene Beweis bleibt auch für unendlichdimensionale normierte Räume bestehen).

In diesem Paragraphen untersuchen wir u.a. weitere von der speziellen Wahl von E unabhängige Eigenschaften geometrisch vollständiger Mengen. Dabei gehen wir von bekannten Aussagen über Körper konstanter Breite des n-dimensionalen euklidschen Raumes aus, wie sie z.B. in [3, § 15] aufgezeigt sind. Wir zeigen z.B.:

- Jede beschränkte Menge $A \subset E$ ist in einer geometrisch vollständigen Menge $M \subset E$ mit $\operatorname{diam}(M) = \operatorname{diam}(A)$ enthalten.
- Für jede geometrisch vollständige Menge $M \subset E$ gilt

$$R(M) + r(M) = \operatorname{diam}(M) \quad \text{und} \quad \Re M = \curlyvee M .$$

2.1 Jeder Körper konstanter Breite ist geometrisch vollständig.

Beweis: Es sei $M \subset E$ von konstanter Breite und $x \in E$ mit $\rho(x,M) \leq \operatorname{diam}(M)$.

Wegen

$$\operatorname{diam}(M) = \underline{B}(M) = B(x',M) \qquad (\forall\, x' \in S')$$

(1.10c)

und

$$\rho(x,M) = \sup_{x' \in U'} H(x',M-x)$$

(1.11a)

gilt für alle $x' \in S'$:

$$H(x',M-x) \leq B(x',M) \quad (=H(x',M)+H(-x',M)) .$$

Mit 1.2 schließen wir, daß $x \in M$ gilt; d.h. M ist geometrisch vollständig. ∎

Von Eggleston [14] übernehmen wir die folgende Definition:

Ein konvexer Körper $M \subset E$ hat die sphärische Durchschnittseigenschaft, wenn

$$M = \bigcap_{m \in M} (m + \operatorname{diam}(M)U)$$

gilt.

Für beliebige konvexe Körper $M \subset E$ gilt stets die Inklusion

$$M \subset \bigcap_{m \in M} (m + \operatorname{diam}(M) U).$$

Eggleston [14] zeigt, daß ein konvexer Körper eines endlichdimensionalen Banachraumes genau dann geometrisch vollständig ist, wenn er die sphärische Durchschnittseigenschaft hat. Sein Beweis ist jedoch unabhängig von der Dimension von E; es gilt der folgende Satz:

2.2 Es sei $M \subset E$ ein konvexer Körper mit dem Durchmesser s. Bezeichnet F die Faltung der Stützfunktionen $H(\cdot, m+s\,U)$ $(m \in M)$ (in Zeichen:

$$F := \underset{m \in M}{*} H(\cdot, m+s\,U) \qquad)$$

und E die Regularisierung von F im Sinne von 1.5, dann gilt:

(a) M ist genau dann geometrisch vollständig, wenn M die sphärische Durchschnittseigenschaft hat.

(b) M ist genau dann geometrisch vollständig, wenn $\underline{F}$ die Stützfunktion von M ist

(c) M ist genau dann von konstanter Breite, wenn M geometrisch vollständig und wenn

$$\underline{F} = \inf_{m \in M} H(\cdot, m+s\,U)$$

gilt.

Ist insbesondere E reflexiv, dann kann $\underline{F}$ in (b) und (c) durch F ersetzt werden.

Beweis: (a)

Ist M geometrisch vollständig und $y \in \bigcap_{m \in M} (m+s\,U)$

dann gilt

$$\rho(y, M) \leq s$$

und somit $y \in M$; d.h. M hat die sphärische Durchschnittseigenschaft.
Hat M die sphärische Durchschnittseigenschaft und ist $y \notin M$, dann gibt es ein $m \in M$ mit

$$y \notin m + s\,U \quad ;$$

d.h. $\rho(y,M) > s$. M ist somit geometrisch vollständig.

(b)
Nach 1.5 ist die Stützfunktion von $\bigcap_{m \in M} (m + s\,U)$ $\underline{F}$.
Zusammen mit (a) folgt (b).

(c)
Nach 1.5 gilt

$$H(\cdot,M) \leq \underline{F} \leq F \leq \inf_{m \in M} H(\cdot, m+s\,U)$$

$$= \inf_{m \in M} (s\,\|\cdot\| + \langle m, \cdot \rangle)$$

$$= s\,\|\cdot\| - H(-\cdot,M) \quad .$$

Ist M von konstanter Breite, dann gilt

$$s\,\|\cdot\| - H(-\cdot,M) = B(\cdot,M) - H(-\cdot,M) = H(\cdot,M)$$

und somit

$$H(\cdot,M) = \underline{F} = F = \inf_{m \in M} H(\cdot, m+s\,U).$$

Ist M geometrisch vollständig und $\underline{F} = \inf H(\cdot,m+s\,U)$, dann ist zusammen mit (b)

$$H(\cdot,M) = \underline{F} = \inf_{m \in M} H(\cdot,m+s\,U)$$

$$= s\,\|\cdot\| - H(-\cdot,M) \quad ;$$

d.h. M ist von konstanter Breite.

Ist E reflexiv, dann ist nach 1.5 $F = \underline{F}$. ■

Bemerkung:

(1) In den von uns betrachteten Beispielen geometrisch vollständiger Mengen (s.z.B. 2.5) läßt sich der Durchschnitt von Kugeln einfacher berechnen als die Faltung der Stützfunktionen von Kugeln.

Als Korollar zu 2.2 erhalten wir:

2.3 Ein konvexer Körper $M \subset E$ ist genau dann eine Kugel, wenn
=== M geometrisch vollständig und symmetrisch ist.

Beweis: Ist M geometrisch vollständig und bzgl. $z \in M$ symmetrisch und hat M den Durchmesser $2s$, dann ist nach 1.12 c $z + sU$ eine Umkugel von M; d.h. $M \subset z+sU$. Da $M \subset z+sU$ und $z+sU$ geometrisch vollständig (s. 2.1, 1.13) ist, gilt nach 2.2

$$z + sU = \bigcap_{x \in z+sU} (x+2sU) \subset \bigcap_{x \in M} (x+2sU) = M . \blacksquare$$

Für symmetrische konvexe Körper sind nach 2.3 und 1.13 die Eigenschaften "geometrisch vollständig" und "von konstanter Breite" äquivalent. Wie die folgenden Beispiele zeigen, ist die Klasse der geometrisch vollständigen Mengen für eine Reihe von Banachräumen echt größer als die der Körper konstanter Breite.

Es sei Q ein vollständig regulärer Raum ([1]).

$C(Q)$ bezeichne den linearen Raum aller stetigen, beschränkten und reellen Funktionen auf Q, versehen mit der Supremumsnorm:

$$|x| := \sup_{t \in Q} |x(t)| \qquad (\forall\, x \in C(Q)).$$

$C(Q)$ ist ein Banachraum.

Sind f,g zwei reelle Funktionen auf Q, dann verstehen wir unter

$f \geq g$, daß für alle $t \in Q$ die Ungleichung

$$f(t) \geq g(t) \qquad \text{gilt.}$$

([1]) Zur Def. s. Bourbaki [4, Chap. 9, § 1, Def. 4] .

Ist $t \in Q$, dann bezeichnen wir mit

x'_t das durch die Zuordnung $x \mapsto x(t)$ $(\forall\, x \in C(Q))$ definierte lineare Funktional auf $C(Q)$.

ξ' bezeichne die Gesamtheit aller dieser Funktionale x'_t $(t \in Q)$.

ξ' ist eine Teilmenge der Einheitssphäre des (stetigen) Dualraumes $C(Q)'$ von $C(Q)$.

Q^* sei der Abschluß von ξ' bzgl. der $\sigma(C(Q)', C(Q))$ - Topologie auf $C(Q)'$. Im folgenden sei Q^* stets mit der durch die $\sigma(C(Q)', C(Q))$ - Topologie auf Q induzierten Topologie versehen.

Q^* ist ein kompakter Hausdorffraum (s. [22, p. 300]).

Durch die Zuordnung $t \longmapsto x'_t$ $(\forall\, t \in Q)$ wird eine Abbildung Φ von Q in Q^* erklärt. Betrachten wir ξ' als topologischen Teilraum von Q^*, dann ist Φ ein Homöomorphismus von Q auf ξ' (s. [22, 28.8]); d.h. wir können Q^* als eine Kompaktifizierung von Q auffassen. Insbesondere ist Q dicht in Q^*.

2.4 Jede auf Q unterhalbstetige (bzw. oberhalbstetige), reelle und beschränkte Funktion f läßt sich zu einer auf Q^* unterhalbstetigen (bzw. oberhalbstetigen) reellen Funktion $\hat{f}$ fortsetzen, indem man für alle $x' \in Q^*$

$$\hat{f}(x') := \sup_{\substack{g \in C(Q) \\ g \le f}} \langle g, x' \rangle \quad \left(\text{bzw. } \hat{f}(x') := \inf_{\substack{g \in C(Q) \\ f \le g}} \langle g, x' \rangle\right)$$

setzt.

Beweis: Ist $g \in C(Q)$, dann ist $\langle g, \cdot \rangle : C(Q)' \longrightarrow \mathbb{R}$ $\sigma(C(Q)', C(Q))$ stetig. Da das Supremum (Infinum) einer Familie von stetigen reellen Funktionen unterhalbstetig (bzw. oberhalbstetig) ist (s. [4, Chap. 4, § 6, Th. 4]),

ist $\hat{f} : \mathcal{Q}^{\sharp} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ unterhalbstetig (bzw. oberhalbstetig). Aus der Dichtheit von $\mathcal{Q}$ in $\mathcal{Q}^{\sharp}$ und der Beschränktheit von f schließen wir, daß $\hat{f}(\mathcal{Q}^{\sharp}) \subset \mathbb{R}$ gilt.
In vollständig regulären Räumen ist jede unterhalbstetige (oberhalbstetige) reelle Funktion f gleich dem Supremum) (Infinum) aller stetigen reellen Funktionen, die kleiner (größer) als f sind (s. [4, Chap. 9, § 1, Prop. 5]).

Damit gilt für alle $t \in \mathcal{Q}$

$$\sup_{\substack{g \in C(\mathcal{Q}) \\ g \le f}} g(t) = f(t) \qquad \left(\text{bzw. } \inf_{\substack{g \in C(\mathcal{Q}) \\ g \ge f}} g(t) = f(t)\right);$$

d.h. $\hat{f}_{|\mathcal{Q}} = f$.■

2.5 Es sei $E = C(\mathcal{Q})$ und $M \subset E$ ein konvexer Körper.
=== Ferner sei für alle $t \in \mathcal{Q}$

$$u(t) := H(x'_t, M) \quad , \quad o(t) := -H(-x'_t, M) \ .$$

(a) M ist genau dann geometrisch vollständig, wenn

(1) $M = \{x \in E : o \le x \le u\}$,

(2) $\limsup_{t' \to t} u(t') - \operatorname{diam}(M) = o(t)$ und

$\liminf_{t' \to t} o(t') + \operatorname{diam}(M) = u(t)$ $(\forall\, t \in \mathcal{Q})$.

(b) Es sei s eine nicht negative reelle Zahl, f (bzw. g) eine auf $\mathcal{Q}$ unterhalbstetige (bzw. oberhalbstetige), reelle und beschränkte Funktion. Gilt

(3) $f \ge g$ und $\sup_{t \in \mathcal{Q}} (f(t) - g(t)) = s$,

(4) $\limsup_{t' \to t} f(t') - s = g(t)$ und

$\liminf_{t' \to t} g(t') + s = f(t)$ $(\forall\, t \in \mathcal{Q})$,

dann ist

$$\{x \in E \ : \ g \leq x \leq f\}$$

geometrisch vollständig.

(c) Jeder Körper konstanter Breite $M \subset E$ ist eine Kugel.

(d) Ist $\mathcal{Q}$ zudem extrem unzusammenhängend ([1]), dann ist jede geometrisch vollständige Menge $M \subset E$ eine Kugel.

Beweis: (a)

Es sei $s := \operatorname{diam}(M)$ und $N := \bigcap_{m \in M} (m + s\,U)$.

Eine einfache Überlegung zeigt, daß gilt:

$$N \equiv \{x \in E \ : \ u - s \leq x \leq o + s\} .$$

Da $\mathcal{Q}$ vollständig regulär ist, gilt für alle $t \in \mathcal{Q}$

$$\sup_{x \in N} x(t) = \operatorname{liminf}_{t' \longrightarrow t} o(t') + s$$

und

$$\inf_{x \in N} x(t) = \operatorname{limsup}_{t' \longrightarrow t} u(t') - s$$

(s. [4, Chap. 9, § 1, Prop. 5] , [4, Chap. 4, § 6, Prop. 4]).

Ist M geometrisch vollständig, dann ist nach 2.2 $M = N$, und somit gilt für alle $t \in \mathcal{Q}$

$$u(t) = \sup_{x \in N} x(t) = \operatorname{liminf}_{t' \longrightarrow t} o(t') + s$$

$$o(t) = \inf_{x \in N} x(t) = \operatorname{limsup}_{t' \longrightarrow t} u(t') - s \quad ;$$

d.h. (1) und (2) sind erfüllt.

([1]) Ein topologischer Raum heißt extrem unzusammenhängend, wenn der Abschluß jeder offenen Menge offen ist (z.B. [26, Bd. II, p. 154]).

Sind (1) und (2) erfüllt, dann folgt aus (2), daß für alle $t \in Q$

$$\sup_{x \in N} x(t) = u(t) \quad \text{und} \quad \inf_{x \in N} x(t) = o(t) \qquad \text{gilt.}$$

Und aus (1) erhalten wir die Gleichheit der Mengen M und N. Damit ist nach 2.2 M geometrisch vollständig.

(b)
Es sei $N := \{x \in E : o \leq x \leq u\}$.

1) $N \neq \emptyset$.

$\hat{f}$ (bzw. $\hat{g}$) sei die unterhalbstetige (bzw. oberhalbstetige) Fortsetzung von f (bzw. g) auf $Q^\sharp$, wie wir sie in 2.4 definiert haben. Da Q in $Q^\sharp$ dicht und $\hat{f} - \hat{g}$ auf $Q^\sharp$ unterhalbstetig ist, gilt für alle $x' \in Q^\sharp$

$$\hat{f}(x') - \hat{g}(x') = \liminf_{\substack{x'_t \longrightarrow x' \\ t \in Q}} \left(f(x'_t) - g(x'_t) \right)$$

$$= \liminf_{\substack{x'_t \longrightarrow x' \\ t \in Q}} \left(f(t) - g(t) \right) \geq 0$$

(s. [4, Chap. 4, § 6, Prop. 4]); d.h. $\hat{f} \geq \hat{g}$ auf $Q^\sharp$.

Nach einem Satz von Dieudonné[12,p. 75] existiert eine auf $Q^\sharp$ ([1]) stetige Funktion $\hat{x}$ mit

$$\hat{g}(x') \leq \hat{x}(x') \leq \hat{f}(x') \qquad (\forall\, x' \in Q^\sharp).$$

Damit ist $x := \hat{x}|Q$ aus N und $N \neq \emptyset$.

2) $\operatorname{diam}(N) = s$.

$$\operatorname{diam}(N) = \sup_{x,y \in N} \sup_{t \in Q} |x(t)-y(t)|$$

([1]) Der Satz von Dieudonné [12,p.75] besagt: Ist X ein parakompakter Raum, $\phi : X \to \mathbb{R}$ oberhalbstetig, $\psi : X \to \mathbb{R}$ unterhalbstetig und $\phi \leq \psi$, dann existiert eine stetige Funktion $\chi : X \to \mathbb{R}$ mit $\phi \leq \chi \leq \psi$.

$$= \sup_{t \in Q} \sup_{x,y \in N} |\langle x-y,\ x'_t \rangle|$$

$$= \sup_{t \in Q} B(x'_t,N) = \sup_{t \in Q} (f(t)-f(t)) = s \quad .$$

(1.10c)

3) $\tilde{N} := \bigcap_{x \in N} (x + s\,U) = N.$

Wie in Teil (a) schließen wir, daß gilt:

$\tilde{N} \equiv \{x \in E : f - s \leq x \leq g + s\}$ und

$$\sup_{x \in \tilde{N}} x(t) = \liminf_{t' \to t} g(t') + s \quad ,$$

$$\inf_{x \in \tilde{N}} x(t) = \limsup_{t' \to t} f(t') - s \qquad (\forall\, t \in Q).$$

Aus Voraussetzung (4) und der Definition von N folgt $\tilde{N} = N$.

Aus 1) - 3) und 2.2 erhalten wir die geometrische Vollständigkeit von N.

(c)

Ist $M \subset E$ von konstanter Breite, dann ist für alle $t \in Q$

$$B(x'_t,M) = H(x'_t,M) + H(-x'_t,M)$$

$$= u(t) - o(t) = \mathrm{diam}(M)$$

($x'_t \in S' \qquad (\forall\, t \in Q)!$).

Da u unterhalbstetig und o oberhalbstetig ist, erhalten wir aus

$$\limsup_{t' \to t} u(t') = \limsup_{t' \to t} o(t') + \mathrm{diam}(M)$$

$$= o(t) + \mathrm{diam}(M) = u(t)$$

und analog

$$\liminf_{t' \longrightarrow t} o(t') = o(t) \qquad (\forall\, t \in Q),$$

daß $u, o \in C(Q)$ sind (1).

Eine einfache Rechnung zeigt, daß $\frac{1}{2}$ (u+o) Symmetriepunkt von M ist. Nach 1.13 ist M eine Kugel.

(d)
Ist M geometrisch vollständig, dann ist nach Teil (a)

$$M = \{x \in E : o \leq x \leq u\}.$$

Ist Q ein vollständig regulärer und extrem unzusammenhängender Raum, dann sind nach dem Satz [3 4, Th. 14] von Stone u und o stetig; d.h. $u, o \in C(Q)$ (2).

$\frac{1}{2}$ (u+o) ist Symmetriepunkt von M, und somit ist M nach 2.3 eine Kugel. ■

Bemerkung:

(2) Für ℓ^∞ (n) zeigt Eggleston [14, Cor. 2], daß jede geometrisch vollständige Menge $M \subset \ell^\infty$ eine Kugel ist. Sein Resultat erweist sich somit als Spezialfall von 2.5 c, denn es gilt $\ell^\infty(n) = C(\{1,\ldots,n\})$.
Desgleichen gibt es in $\ell^\infty = C(\mathbb{N})$ außer den Kugeln keine weiteren geometrisch vollständigen Mengen.
Dagegen gibt es beispielsweise in $C(\mathbb{R})$ beliebig viele geometrisch vollständige Mengen, die keine Kugeln sind (s. das zu Anfang des § 2 gegebene Beispiel). Geometrisch vollständige Mengen, die einen von 0 verschiedenen Durchmesser haben, sind nicht notwendigerweise Eikörper.

---

(1) Da M beschränkt ist, sind auch u, o beschränkt!

(2) Die für uns relevante Aussage des Satzes [34,Th.14] besagt: Ist Q extrem unzusammenhängend und vollständig regulär und ist X eine nicht leere Familie von reellen, stetigen Funktionen auf Q, dann sind $\sup_{x \in X} x$ und $\inf_{x \in X} x$ stetig, falls $\sup_{x \in X} x$ nach oben und $\inf_{x \in X} x$ nach unten durch eine stetige Funktionen beschränkt ist.

Beispiel: $M := \{x \in C(\mathbb{R}) : g \leq x \leq f\}$ mit

$$f(t) := \begin{cases} 0 & t \in [0,1] \\ 1 & t \in \mathbb{R}\setminus[0,1] \end{cases} \qquad , \quad g(t) := \begin{cases} -1 & t \in (0,1) \\ 0 & t \in \mathbb{R}\setminus(0,1) \end{cases}$$

ist geometrisch vollständig (s. 2.5 b), jedoch kein Eikörper.

Es sei $M \subset E$ nicht leer und beschränkt, dann heißt eine geometrisch vollständige Menge N geometrische Vervollständigung von M, wenn

$$M \subset N \quad \text{und} \quad \operatorname{diam}(M) = \operatorname{diam}(N) \quad \text{gilt.}$$

Die geometrische Vervollständigung N ist nicht eindeutig durch M bestimmt. Beispielsweise seien $x = 0$ und $y = (1,0)$ zwei Punkte der euklidschen Ebene, und es sei $M := \operatorname{con}(\{x,y\})$, dann sind N_1 und N_2 zwei geometrische Vervollständigungen von M, die wie folgt definiert sind:

$$N_1 := \frac{1}{2}(y+U) \qquad \text{und} \qquad N_2 = U \cap (y+U) \cap (z+U) \,,$$

$$z := \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \,.$$

Das in der Literatur (s. z.B. [3, p. 130] für den n-dimensionalen euklidschen Raum angegebene Verfahren zur Konstruktion der geometrischen Vervollständigung von M läßt sich nicht auf den allgemeinen Fall übertragen; denn es verwendet im wesentlichen die Aussage, daß der Eikörper kompakt ist.

Die Idee für das hier entwickelte Konstruktionsverfahren beruht auf der sphärischen Durchschnittseigenschaft geometrisch vollständiger Mengen (s. 2.2 a).

2.6 === Zu jeder nicht leeren beschränkten Menge $M \subset E$ existiert eine geometrische Vervollständigung N von M .

Beweis: Da die Durchmesser von M und $\overline{\text{con}}$ (M) gleich sind, können wir o.B.d.A. $M \in \mathfrak{K}^b_{cm}(E)$ voraussetzen. Es sei $s := \text{diam}(M)$.

Die Elemente von E denke man sich wohlgeordnet mit dem Ordnungstyp α; die Elemente aus E lassen sich dann vermöge aller Ordinalzahlen $\beta < \alpha$ numerieren:

$$E = \{x_\beta \in E \ : \ \beta < \alpha\}.$$

Ferner sei o.B.d.A. $x_1 \in M$.

Setze:

$$M_1 := x_1 + sU$$

und für $\beta < \alpha$

$$M_\beta := \begin{cases} \bigcap_{\beta'<\beta} M_{\beta'} \cap (x_\beta + sU) & \text{falls } x_\beta \in \bigcap_{\beta'<\beta} M_{\beta'} \text{ und } x_\beta + sU \supset M \\ \bigcap_{\beta'<\beta} M_{\beta'} & \text{anderenfalls} \end{cases}$$

$$N := \bigcap_{\beta<\alpha} M_\beta .$$

Dann ist N eine geometrische Vervollständigung von M.

Zum Beweis der obigen Behauptung benötigen wir den folgenden Hilfssatz:

2.7 Ist $\gamma < \alpha$, dann gilt:

$$x_\gamma \in N \rightleftharpoons x_\gamma \in \bigcap_{\beta<\gamma} M_\beta \text{ und } x_\gamma + sU \supset M .$$

Beweis: (von 2.7)

Ist $x_\gamma \in N$, dann ist insbesondere $x_\gamma \in \bigcap_{\beta<\gamma} M_\beta$.

Angenommen $x_\gamma + sU$ enthält nicht M, dann existiert ein $x_\delta \in M$ mit $x_\delta + sU \not\ni x_\gamma$.

Da nach Konstruktion von N M stets in N enthalten ist und $x_\delta + sU$ M enthält, hat M_δ die Gestalt:

$$M_\delta = \bigcap_{\beta < \delta} M_\beta \cap (x_\delta + sU) .$$

Daher ist $x_\gamma \notin M_\delta$ und somit $x_\gamma \notin N$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Gilt umgekehrt $x_\gamma \in \bigcap_{\beta < \gamma} M_\beta$ und $x_\gamma + sU \supset M$,
dann ist gemäß der Konstruktionsvorschrift

$$M_\gamma = \bigcap_{\beta < \gamma} M_\beta \cap (x_\gamma + sU) .$$

Und es gilt für alle $\beta < \gamma$

$$x_\gamma \in M_\beta .$$

Angenommen es existiert ein $\tilde{x} > \gamma$ mit $x_\gamma \notin M_{\tilde{x}}$,

dann ist

$$\Omega_\gamma := \{x < \alpha : x_\gamma \notin M_x\} \text{ nicht leer.}$$

$\underline{x}$ bezeichne das kleinste Element in Ω_γ ($\underline{x} > \gamma$!)

Der Definition von Ω_γ und $\underline{x}$ entnehmen wir, daß

$$(*) \quad x_\gamma \in M_\beta \qquad (\forall\, \beta < \underline{x}) \quad ;$$

d.h. für alle $\beta < \underline{x}$ ist $M_\beta \neq M_{\underline{x}}$.

Daher muß $M_{\underline{x}}$ die folgende Gestalt haben:

$$M_{\underline{x}} = \bigcap_{\beta < \underline{x}} M_\beta \cap (x_{\underline{x}} + sU) \quad ;$$

d.h. es gilt (nach Konstruktionsvorschrift)

$$x_{\underline{x}} \in \bigcap_{\beta < \underline{x}} M_\beta \ , \quad x_{\underline{x}} + s\,U \supset M \ .$$

Wegen (*) gilt $x_\gamma \notin x_{\underline{x}} + s\,U$. Damit ist

$$x_{\underline{x}} \notin x_\gamma + s\,U$$

und

$$x_{\underline{x}} \notin M_\gamma \qquad (\gamma < \underline{x}!)$$

im Widerspruch zu $x_{\underline{x}} \in M_\beta \quad (\beta < \underline{x})$. ■

Beweis: (Fortsetzung von 2.6)

Gemäß der Konstruktionsvorschrift gilt $M \subset N$.

Nach 2.2 genügt es zu zeigen, daß

$$N = \bigcap_{x \in N} (x + s\,U).$$

Dann ist insbesondere diam(N) = s.

Ist $x_\beta \in N$, dann ist nach 2.7 $x_\beta \in M_\beta$ und $M \subset x_\beta + s\,U$.

Daher hat M_β die Gestalt

$$M_\beta = \bigcap_{\beta' < \beta} M_{\beta'} \cap (x_\beta + s\,U) \ ,$$

und es gilt:

$$N = \bigcap_{\beta < \alpha} M_\beta \subset M_\beta \subset x_\beta + s\,U \ ;$$

d.h. $N \subset \bigcap_{x \in N} (x + s\,U)$.

Ist $x_\gamma \in (\bigcap_{x \in N} (x + s\,U)) \setminus N$, dann ist

$\Omega_\gamma := \{ \beta < \alpha : x_\gamma \notin M_\beta \}$ nicht leer.

$\underline{\beta}$ bezeichne das kleinste Element von Ω_γ .

$\underline{\beta} \neq 1$, da $x_\gamma \in \bigcap_{x \in N} (x + s\,U) \subset x_1 + s\,U = M_1$.

Der Definition von Ω_γ und $\underline{\beta}$ entnehmen wir, daß

$$x_\gamma \notin M_{\underline{\beta}}$$

und

$$x_\gamma \in M_\beta \qquad (\forall\, \beta < \underline{\beta}) \quad ;$$

d.h.

$$M_{\underline{\beta}} \neq M_\beta \qquad (\forall\, \beta < \underline{\beta}) \quad .$$

Daher muß $M_{\underline{\beta}}$ die folgende Gestalt haben:

$$M_{\underline{\beta}} = \bigcap_{\beta < \underline{\beta}} M_\beta \cap (x_{\underline{\beta}} + s\,U)$$

mit

$$x_{\underline{\beta}} \in \bigcap_{\beta < \underline{\beta}} M_\beta \quad \text{und} \quad x_{\underline{\beta}} + s\,U \supset M.$$

Wegen

$$x_\gamma \in M_\beta \neq M_{\underline{\beta}} \qquad (\forall\, \beta < \underline{\beta})$$

ist $x_\gamma \notin x_{\underline{\beta}} + s\,U$.

Nach 2.7 gilt $x_{\underline{\beta}} \in N$, und zusammen mit $x_\gamma \notin x_{\underline{\beta}} + s\,U$ gilt im Widerspruch zur Annahme

$$x_\gamma \notin \bigcap_{x \in N} (x + s\,U) \; (\subset x_{\underline{\beta}} + s\,U)$$

d.h.

$$N = \bigcap_{x \in N} (x + s\,U). \blacksquare$$

Bemerkung:

(3) In dem Beweis zu 2.6 kann man anstelle von E eine in E dichte Teilmenge D wohlordnen und die Konstruktion von N bzgl. D durchführen.

2.8 Ist $M \subset E$ ein konvexer Körper und $x + sU$ eine Kugel, die
=== M enthält, dann gibt es eine geometrische Vervollständigung N von M, die ebenfalls in $x + sU$ enthalten ist.

Beweis: Im Beweis von 2.6 setze man anstelle von

$$M_1 := x_1 + \operatorname{diam}(M)U \qquad M_1 := (x_1 + \operatorname{diam}(M)U) \cap (x+sU).$$

Das so modifizierte Konstruktionsverfahren liefert wie in 2.6 eine geometrische Vervollständigung N von M. Insbesondere gilt: $N \subset x + sU$. ∎

Bemerkung:

(4) Nach 2.8 gilt für jeden konvexen Körper $M \subset E$

$$R(M) = \inf R(N) \quad ,$$

wobei das Infimum über alle geometrischen Vervollständigungen N von M zu nehmen ist. Hat M eine Umkugel, dann existiert eine geometrische Vervollständigung N von M mit $R(N) = R(M)$.

Wie bei der Bestimmung des Umkugelradius kann man sich bei einer Reihe von Problemen auf die Klasse der geometrisch vollständigen Mengen beschränken. So zum Beispiel bei der Bestimmung der bestmöglichen n-Überdeckung einer beschränkten, nicht leeren Menge:

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \subset E$ nicht leer. Ein System $A_1,\ldots,A_n$ von nicht leeren Teilmengen von E, heißt bestmögliche n-Überdeckung von A, wenn

$$A \subset \bigcup_{i=1,\ldots,n} A_i \quad \text{und}$$

$$\sup_{i=1,\ldots,n} \operatorname{diam}(A_i) = \inf_{A \subset \bigcup_{i=1,\ldots,n} B_i} \sup_{i=1,\ldots,n} \operatorname{diam}(B_i)$$

gilt; das Infimum ist über alle möglichen Überdeckungen von A zu nehmen, die jeweils aus n nicht leeren Teilmengen von E bestehen.

Eine Menge von n-Punkten $\{x_i \in E : i = 1,\dots,n\}$ heißt bestmögliches n - Netz von A, wenn

$$A \subset \bigcup_{\substack{i=1,\dots,n \\ s_i \geq 0}} (x_i + s_i U) \quad \text{und}$$

$$\sup_{i=1,\dots,n} s_i = \inf_{A \subset \bigcup_{i=1,\dots,n}(y_i+t_iU)} \sup t_i$$

$$y_i \in E, \quad t_i \geq 0$$

gilt.

Bemerkung:

(5) Garkavi [17, Th. 4] zeigt, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ jede nicht leere und beschränkte Menge $M \subset E$ eine bestmögliche n-Überdeckung hat. Zusammen mit 2.6 gilt, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ jede nicht leere beschränkte Menge $M \subset E$ eine bestmögliche n-Überdeckung hat, die aus geometrisch vollständigen Mengen besteht. Bei der Suche nach einer bestmöglichen n-Überdeckung können wir uns daher auf die Klasse der geometrisch vollständigen Mengen beschränken. Ist in E jede geometrisch vollständige Menge eine Kugel, dann hat für alle $n \in \mathbb{N}$ jede nicht leere, beschränkte Menge $M \subset E$ ein bestmögliches n-Netz. Beispiele hierfür liefert der Satz 2.5 c.
Dagegen gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ $(n > 1)$ und eine nicht leere, beschränkte Menge $M \subset C([0,1])$, die kein bestmögliches n-Netz hat (s. [17]).

Für jeden Körper konstanter Breite M des n-dimensionalen euklidschen Raumes gilt

$$R(M) + r(M) = \operatorname{diam}(M) \quad \text{und} \quad \Re M = r M$$

(s. z. B. Eggleston [13, Th. 53]). Diese Gleichung zwischen In- und Umkugelradius ermöglicht eine einfache Berechnung des Inkugelradius'. Der folgende Satz zeigt, daß die oben angegebenen Beziehungen für geometrisch vollständige Mengen eines normierten linearen Raumes bestehen bleiben.

2.9 Für jede geometrisch vollständige Menge $M \subset E$ gilt:

(a) $R(M) + r(M) = \operatorname{diam}(M)$;

(b) $\mathfrak{R}M = \mathfrak{r}M$

$$= \bigcap_{x' \in E'} \{x \in E : -H(-x', M) + r(M)\|x'\| \leq \langle x, x' \rangle \leq H(x', M) - r(M)\|x'\|\}$$

und

$$\operatorname{diam}(\mathfrak{R}M) \leq R(M) - r(M) \quad (\text{falls } \mathfrak{R}M \neq \emptyset);$$

insbesondere hat jede Umkugel von M eine zur Umkugel konzentrische Inkugel;

(c) Ist $H(\cdot, M) - r(M)\|\cdot\|$ eine Stützfunktion, dann ist $\mathfrak{R}M$ geometrisch vollständig, und der Durchmesser von $\mathfrak{R}M$ ist gleich $R(M) - r(M)$.

Beweis: Es sei o.B.d.A. $\operatorname{diam}(M) > 0$.
Abkürzend setzen wir: $r := R(M)$, $R := R(M)$ und $s := \operatorname{diam}(M)$.

(a)
Nach 1.11 gilt $r \leq R \leq s$ und somit $s - R \geq 0$ und $s - r \geq 0$.

1) $r \geq s - R$.

Für $s = R$ ist die Ungleichung trivial, es sei daher $R < s$.
Dann gilt:

(*) $(\forall\, t \in (R,s))(\exists\, x \in M) \quad x + (t-R)U \subset M \subset x + tU.$

Aus (*) erhalten wir:

$$r = \sup \{t \geq 0 : m + t\,U \subset M,\ m \in M\}$$

$$\geq \sup \{t - R : t \in (R,s)\}$$

$$= s - R .$$

Somit gilt es, (*) zu zeigen.

Aus der Definition von R(M) und der Wahl von $t \in (R,s)$ ergibt sich die Existenz eines $x \in E$ mit $x + t\,U \supset M$. Da $t < s$ und M geometrisch vollständig ist, ist $x \in M$. Wegen

$$\|y - m\| \leq \|y - x\| + \|x - m\| \qquad (\forall\, y \in x + (t-R)U)$$

gilt

$$\rho(y,M) \leq t - R + R \leq s \qquad (\forall\, y \in x + (t-R)U);$$

d.h. $x + (t-R)U \subset M$. Damit ist (*) und somit 1) gezeigt.

2) $R \leq s - r$

Für $r = 0$ bleibt nichts zu zeigen; es sei daher $r > 0$. Dann gilt:

(**) $(\forall\, t \in (0,r))(\exists\, m \in M)\ \ m + t\,U \subset M \subset m + (s-t)U.$

Aus (**) erhalten wir:

$$R = \inf \{t > 0 : x + t\,U \supset M,\ x \in E\}$$

$$\leq \inf \{s - t : t \in (0,r)\}$$

$$= s - r.$$

Zu zeigen bleibt daher (**).

Aus der Definition des Inkugelradius und der Wahl von t erhalten wir die Existenz eines $m \in M$ mit $m + t\,U \subset M$.

O.B.d.A. sei $m = \Theta$.

Ist $y \in E \setminus (s-t)U$, dann ist

$$-\frac{y}{\|y\|}\, t \in t\, S \subset M \ .$$

Da M den Durchmesser s hat, gilt

$$M \subset -\frac{y}{\|y\|}\, t + s\, U \quad .$$

Somit ist

$$\left\| y + \frac{y}{\|y\|}\, t \right\| = \|y\| + t > s - t + t = s \ ;$$

d.h. $y \notin M$. Damit ist (**) und somit 2) gezeigt.

(b)

Die Identität $\Re M = \Gamma M$ folgt aus (*) und (**).

Weiter gilt:

$$x \in M \rightleftharpoons x + r\, U \subset M$$

$$\underset{(1.2)}{\rightleftharpoons} H(\cdot, x+r\,U) = \langle x, \cdot \rangle + r \|\cdot\| \leq H(\cdot, M)$$

$$\rightleftharpoons -H(-\cdot, M) + r \|\cdot\| \leq \langle x, \cdot \rangle \leq H(\cdot, M) - r \|\cdot\|$$

Damit ist $\Re M (= \Gamma M)$ gleich der in (c) angegebenen Menge.

Ist $\Re M \neq \emptyset$, dann erhalten wir aus der letzten Ungleichung, daß

$$B(\cdot, \Re M) \leq B(\cdot, M) - 2\, r \|\cdot\| \quad .$$

Damit ist

$$\operatorname{diam}(\Re M) = \underline{B}(\Re M) \leq \underline{B}(M) - 2\, r \underset{(1.1Cc)}{=} s - 2\, r$$

$$\underset{(a)}{\leq} R - r \quad .$$

(c)

Ist $H(\cdot,M) - r\|\cdot\|$ eine Stützfunktion, dann ist $H(\cdot, \mathfrak{R}M) = H(\cdot,M) - r\|\cdot\|$ (s. (b)) und $\operatorname{diam}(\mathfrak{R}M) = R - r$.

Ist $x \in E$ mit $\rho(x, M) \leq R - r$, dann gilt nach 1.11:

$$\rho(x, \mathfrak{R}M) = \sup_{x' \in U'} H(x', \mathfrak{R}M - x)$$

$$= \sup_{x' \in U'} (H(x', M-x) - r\|x'\|)$$

$$\leq R - r$$

Damit ist für alle $x' \in U'$

$$H(x', M-x) - r\|x'\| \leq R - r \quad ;$$

d.h. $\quad H(x', M - x) \leq R \qquad (\forall\, x' \in U').$

Zusammen mit 1.11 erhalten wir:

$$\rho(x,M) = \sup_{x' \in U'} H(x', M-x) \leq R$$

d.h. $x \in \mathfrak{R}M$.

$\mathfrak{R}M$ ist somit geometrisch vollständig. ∎

Als Korollar erhalten wir einen weiteren Charakterisierungssatz für Kugeln:

2.10 ==== Eine geometrisch vollständige Menge $M \subset E$ ist genau dann eine Kugel, wenn

$$R(M) = \frac{1}{2} \operatorname{diam}(M) .$$

Bemerkung:

(6) Ist E endlichdimensional, dann ist jede geometrisch vollständige Menge entweder ein Eikörper oder ein Punkt. Denn ein konvexer Körper, der der Darstellung in 2.2 a genügt und der einen von Null verschiedenen Durchmesser hat, kann nicht in einer Hyperebene enthalten sein. Ist E unendlichdimensional, dann kann es geometrisch vollständige Mengen geben, die mehr als einen Punkt enthalten und die keine Eikörper sind (z.B. $E = C(\mathbb{R})$, s. § 2 Bem. 2). Insbesondere ist für solche geometrisch vollständigen Mengen $\mathfrak{R}M = M$ und somit $\mathfrak{R}M$ geometrisch vollständig. Es stellen sich daher zwei Fragen:

1) Ist $\mathfrak{R}M$ für jede geometrisch vollständige Menge geometrisch vollständig?

2) In welchen normierten linearen Räumen ist jede nicht triviale geometrisch vollständige Menge ein Eikörper?

Für den Fall $E = C(Q)$ können wir auf die erste Frage eine positive Antwort geben:

2.11 ==== Ist $M \subset E = C(Q)$ geometrisch vollständig, dann ist $\mathfrak{R}M$ geometrisch vollständig und der Durchmesser von $\mathfrak{R}M$ ist gleich $R(M) - r(M)$. Ferner gilt:

$$\mathfrak{R}M + r(M)\,U = M$$

Beweis: Es sei $s := \operatorname{diam}(M)$, $r := r(M)$, $R := R(M)$ und $u(t) := H(x_t', M)$, $o(t) := -H(-x_t', M)$ $(\forall\, t \in Q)$.

1) $M \equiv \{x \in E : o + r \le x \le u - r\}$.

Wegen

$$M \equiv \{x \in E : o \le x \le u\} \quad \text{(s. 2.5 a)}$$

ist

$$\{x \in E \;:\; o + r \leq x \leq u - r\} \subset \mathfrak{R}M.$$

Andererseits ist nach 2.9 b

$$\mathfrak{R}M = \bigcap_{x' \in E'} \{x \in E : -H(-x',M) + r\|x'\| \leq \langle x,x' \rangle \leq H(x',M) - r\|x'\| \}$$

$$\subset \bigcap_{t \in Q} \{x \in E : o(t) + r \leq x(t) \leq u(t) - r\}.$$

2) $R - r$, $g := o + r$ und $f := u - r$ erfüllen die Voraussetzungen des Satzes 2.5 b.

Ein einfache Rechnung zeigt, daß

$$\sup_{t \in Q} (u(t) - o(t)) = \sup_{t \in Q} B(x_t',M) = s \quad \text{und}$$

$$u(t) - o(t) = B(x_t',M) \geq 2r \qquad (\forall\, t \in Q) \quad \text{gilt.}$$

Damit ist

$$f(t) - g(t) = u(t) - o(t) - 2r \geq o \qquad (\forall\, t \in Q)$$

und

$$\sup_{t \in Q} (f(t) - g(t)) = s - 2r \underset{(2.9a)}{=} R - r \;.$$

u (bzw. o) ist per def. unterhalbstetig (bzw. oberhalbstetig). Damit ist auch f (bzw. g) unterhalbstetig (bzw. oberhalbstetig).

$$\limsup_{t' \to t} f(t') - (R-r) \underset{(2.9a)}{=} \limsup_{t' \to t} u(t') - s + r$$

$$\underset{(2.5a)}{=} o(t) + r = g(t)$$

Analog zeigt man, daß

$$\liminf_{t' \to t} g(t') - (R-r) = f(t) \quad \text{ist.}$$

Damit sind alle Voraussetzungen von 2.5 b erfüllt; $\Re M$ ist geometrisch vollständig, der Durchmesser von $\Re M$ ist $R - r$.

Wegen

$$\Re M = \{x \in E : o + r \leq x \leq u - r\} \quad \text{und}$$

$$M = \{x \in E : o \leq x \leq u\}$$

ist die Minkowskische Summe von $\Re M$ und rU gleich M. ∎

Offen ist die 1) Frage für beliebiges E.
Mit Hilfe von 2.6 und 2.9 lassen sich die normierten Räume charakterisieren, in denen jede nicht triviale geometrisch vollständige Menge ein Eikörper ist:

2.12 ==== In E ist jede nicht triviale geometrisch vollständige Menge genau dann ein Eikörper, wenn für jeden konvexen Körper $M \subset E$ mit $\operatorname{diam}(M) > 0$

$$R(M) < \operatorname{diam}(M)$$

gilt.

Beweis: Ist $M \subset E$ ein konvexer Körper, dann existiert nach 2.6 eine geometrische Vervollständigung N von M.

Aus

$$R(M) \leq R_N(M) \leq R_N(N) = R(N) \leq \operatorname{diam}(N) = \operatorname{diam}(M)$$

(N geometrisch vollständig!)

und 2.9 a erhalten wir die Äquivalenz der Aussagen. ∎

Von Brodskii und Milman [6] übernehmen wir die folgende Definition:
Eine konvexe Menge $A \subset E$ hat Normalstruktur, wenn für alle $M \in \tilde{K}^b_{ow}(A)$ mit $\operatorname{diam}(M) > 0$ die Ungleichung

$$R_M(M) < \operatorname{diam}(M)$$

gilt.

Bemerkung:

(7) Wegen $R(M) \leq R_M(M)$ $(\forall\, M \in \tilde{K}^b_{ow}(E)$ ist jede nicht triviale geometrisch vollständige Menge ein Eikörper, wenn E Normalstruktur hat. Umgekehrt braucht E keine Normalstruktur zu haben, wenn in E jede nicht triviale geometrisch vollständige Menge ein Eikörper ist (s. hierzu: § 3 Bem. (5).

Beispiele für normierte lineare Räume mit Normalstruktur: alle endlichdimensionalen Banachräume, alle uniform konvexen Räume (s. [2]).

Bevor wir die normierten linearen Räume mit Normalstruktur charakterisieren können, benötigen wir die folgende Aussage, die von Eggleston [14] für endlich dimensionale Banachräume bereits gezeigt ist.

2.13 ==== (a) Jede geometrisch vollständige Menge ist diametral maximal.

(b) Jeder diametral maximale Eikörper ist geometrisch vollständig.

Beweis: (a)

Ist $M \subset E$ geometrisch vollständig und $x \in M$ mit $s := \operatorname{diam}(M) - \rho(x,M) > 0$, dann folgt aus

$$\rho(y,M) \leq \|x - y\| + \rho(x,M)$$
$$\leq \operatorname{diam}(M) \qquad (\forall\, y \in x + sU),$$

daß x innerer Punkt von M ist; d.h. für alle Randpunkte x von M gilt $\rho(x,M) = \operatorname{diam}(M)$.

(b)
Ist M ein diametral maximaler Eikörper und y ein innerer Punkt von M, dann ist $\rho(y,M) < \operatorname{diam}(M)$.

Angenommen es gibt ein $x \in E \setminus M$ mit $\rho(y,M) \leq \operatorname{diam}(M)$, dann existiert ein $s \in (0,1)$, so daß $z := s\,x + (1-s)y$ aus dem Rand von M ist.

Wegen

$$M \subset (x + \operatorname{diam}(M)\, U) \cap (y + \rho(y,M)\, U)$$

gilt

$$M \subset z + t\,U \quad \text{mit}$$

$$t := s \operatorname{diam}(M) + (1-s)\,\rho(y,M) < \operatorname{diam}(M).$$

Dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung $\rho(z,M)=\operatorname{diam}(M)$. Damit ist M geometrisch vollständig. ∎

Bemerkung:

(8) Es gibt diametral maximale konvexe Körper, die nicht geometrisch vollständig sind (s. das Beispiel aus § 3 Bem. (5).)

2.14 ==== E hat genau dann Normalstruktur, wenn jeder nicht triviale diametral maximale konvexe Körper ein geometrisch vollständiger Eikörper ist.

Beweis: Ist $M \subset E$ ein diametral maximaler konvexer Körper mit $\operatorname{diam}(M) > 0$ und hat E Normalstruktur, dann existiert ein $x \in M$ mit
$\rho(x,M) < \operatorname{diam}(M)$ $\quad (R_M(M) < \operatorname{diam}(M))$;

d.h. x ist innerer Punkt von M. Nach 2.13 b ist M geometrisch vollständig.

Ist jeder diametral maximale konvexe Körper $M \subset E$ mit $\operatorname{diam}(M) > 0$ ein geometrisch vollständiger Eikörper und ist $N \subset E$ ein konvexer Körper, dann existiert ein $x \in N$ mit $\rho(x,N) < \operatorname{diam}(N)$, falls $\operatorname{diam}(N) > 0$ ist. ■

Bemerkung:

(9) Da jeder endlichdimensionale Banachraum Normalstruktur hat (s. [2]), sind die Begriffe "diametral maximal" und "geometrisch vollständig" für konvexe Körper eines endlichdimensionalen Banachraumes äquivalent.

§ 3 In- und Umkugel

$\mathfrak{M} \subset \bar{K}^b_{(m)}(E)$ heißt gleichmäßig beschränkt, wenn es eine reelle Zahl $s \geq 0$ gibt, so daß $s\,U$ die Vereinigung aller $M \in \mathfrak{M}$ enthält.
Dementsprechend heißt ein Netz [1] konvexer Körper $(M_\iota : \iota \in I)$ gleichmäßig beschränkt, wenn $\{M_\iota : \iota \in I\}$ gleichmäßig beschränkt ist.
Falls E endlichdimensional ist, gilt der Blaschkesche Auswahlsatz (s. z. B. Valentine [36]):

Jede gleichmäßig beschränkte Folge konvexer Körper enthält eine Teilfolge, die in der Hausdorffmetrik gegen einen konvexen Körper konvergiert.

Oder äquivalent hierzu gilt:

Jede gleichmäßig beschränkte Menge $\mathfrak{M} \subset \bar{K}^b_{(m)}(E)$ ist relativ kompakt in $\bar{K}^b_{(m)}(E)_{d_H}$.

Eine Reihe von Problemen aus der Theorie der konvexen Körper endlichdimensionaler Banachräume lassen sich mit dem Blaschkeschen Auswahlsatz lösen. So kann man für jeden konvexen Körper eines endlich dimensionalen Banachraumes die Existenz einer In- und Umkugel nachweisen (s. z. B. Eggleston [13, p. 76]).
Wir zeigen exemplarisch für den Fall, daß E reflexiv ist, daß man Existenzaussagen über In- und Umkugeln konvexer Körper aus einem verallgemeinerten Auswahlsatz erhalten kann. Wir verwenden hierzu den verallgemeinerten Blaschkeschen Auswahlsatz von Dierolf [11, S. 3.1] .

Ferner zeigen wir die Existenz von Umkugeln konvexer Körper in $C(Q)$; außerdem betrachten wir Abschätzungen des Umkugelradius'.

---

[1] Zur Terminologie des Netzes s. Kelley [23] .

Von Dierolf [11] übernehmen wir den Satz:

3.1 Ist $A \subset E$ nicht leer und schwach abgeschlossen, dann ist die Menge

$$\mathfrak{M} := \{M \in \mathfrak{K}_{\omega}(A) : M \text{ schwach kompakt}\}$$

in $\mathfrak{T}_0(E)$ genau dann kompakt, wenn A schwach kompakt ist.

Beweis: s. [11, Satz 3.1]

Für reflexive Banachräume läßt sich der verallgemeinerte Blaschkesche Auswahlsatz von Dierolf wie folgt formulieren:

3.2 Ist E ein reflexiver Banachraum, dann gilt:

(a) Jede gleichmäßig beschränkte Familie von konvexen Körpern ist relativ kompakt in $\mathfrak{T}_0(E)$;

(b) jedes gleichmäßig beschränkte Netz konvexer Körper in E besitzt ein konvergentes Teilnetz.

Ist außerdem E separabel, dann gilt:

(c) Jede gleichmäßig beschränkte Folge konvexer Körper in E hat eine konvergente Teilfolge.

Beweis: (a) und (b) folgen aus 3.1.

(c)
Ist $(M_n : n \in \mathbb{N})$ eine gleichmäßig beschränkte Folge konvexer Körper in E, dann existiert per. def. ein $s \geq o$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ die Inklusion $M_n \subset sU$ gilt.

Da E reflexiv und separabel ist, ist die schwache Topologie auf sU metrisierbar. Nach A. 5 b genügt die Vietoristopologie auf $\mathcal{O}_o(sU)$ dem 2. Hausdorffschen Abzählbarkeitsaxiom. Zusammen mit (b) erhalten wir die Aussage (c). ■

3.3 Für schwach kompaktes $A \in \mathcal{O}_o(E)$ sind

$\mathfrak{M}_s := \{M \in \mathcal{K}_m(A) : M \text{ symmetrisch}\}$ und

$\mathfrak{M}_b := \{M \in \mathcal{K}_m(A) : M \text{ von konstanter Breite}\}$

kompakt in $\mathcal{O}_c(F)$.

Beweis: Nach 3.1 ist $\mathcal{K}_m(A)$ kompakt in $\mathcal{O}_o(E)$. Es gilt daher, die Abgeschlossenheit von $\mathfrak{M}_s$ bzw. $\mathfrak{M}_b$ in $\mathcal{K}_m(A)$ zu zeigen.
Es sei $(M_\iota : \iota \in I)$ ein Netz mit $M_\iota \subset A$ $(\forall\, \iota \in I)$.
Ferner konvergiere $(M_\iota : \iota \in I)$ in $\mathcal{O}_o(E)$ gegen M_o;
$M_o \in \mathcal{K}_m(A)$ (da $\mathcal{K}_m(A)$ in $\mathcal{O}_o(E)$ abgeschlossen ist).

1) Ist für alle $\iota \in I$ M_ι symmetrisch bzgl. $z_\iota \in M_\iota$, dann existiert ein $z \in A$ und ein Teilnetz $(z_{\pi(j)} : j \in J)$, das schwach gegen z konvergiert (A schwach kompakt!). Insbesondere konvergiert

$(M_{\pi(j)} : j \in J)$ gegen M_o. Nach 1.12a gilt für alle $j \in J$ und $x' \in S'$

$$H(x', M_{\pi(j)}) - H(-x', M_{\pi(j)}) = 2 \langle z_{\pi(j)}, x' \rangle .$$

Da $H(x',\cdot) : \mathcal{K}_{\omega}^{b}(E) \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig ist (s. 1.7) und $(z_{\pi(j)} : j \in J)$ schwach gegen z konvergiert, gilt:

$$H(x',M_o) - H(-x',M_o) = 2 \langle z, x' \rangle \qquad (\forall\, x' \in S').$$

Nach 1.12 a ist daher M_o bzgl. z symmetrisch; d.h. $\mathfrak{M}_s$ ist abgeschlossen in $\mathcal{K}_{\omega}(A)$.

2) Ist für alle $\iota \in I$ M_ι von konstanter Breite, dann ist wegen der Stetigkeit der Abbildung $B(x',\cdot) : \mathcal{K}_{\omega}^{b}(E) \longrightarrow \mathbb{R}$ (s. 1.10 a) M_o von konstanter Breite; d.h. $\mathfrak{M}_b$ ist in $\mathcal{K}_{\omega}(A)$ abgeschlossen. ∎

Als Korollar erhalten wir den folgenden Existenzsatz:

3.4 === Ist E reflexiv, dann hat jede nicht leere und beschränkte Menge $X \subset E$ eine Umkugel. Ist X außerdem schwach abgeschlossen, dann hat X auch eine Inkugel.

Beweis: Es sei $X \subset E$ nicht leer und beschränkt, $s := R(X)+1$,

$$M := \{y \in E : \rho(y,X) \leq s\} \subset \bigcap_{x \in X} (x + sU) .$$

M ist ein konvexer Körper und wegen

$$R(X) = \inf_{y \in E} \rho(y,X)$$

ist $R(X) = R_M(X)$.

$A := M + sU$ ist schwach kompakt, und es gilt:

$\mathfrak{M} := \{x + tU \subset M + sU : x + tU \supset X\} \neq \emptyset$.

Sind $\mathfrak{M}_s$ und $\mathfrak{M}_b$ wie in 3.3 definiert, dann ist nach 3.3 $\mathfrak{M}_s \cap \mathfrak{M}_b$ kompakt in $\mathcal{O}_o(E)$, und nach 1.13 ist $\mathfrak{M}_s \cap \mathfrak{M}_b$ gleich der Menge aller Kugeln, die in A enthalten ist; d.h.

$$\mathfrak{M} = \{N \in \mathfrak{M}_s \cap \mathfrak{M}_b : N \supset X\} .$$

Da nach A. 2 c

$$\{Y \in \mathcal{O}_o(E) : Y \supset X\}$$

in $\mathcal{O}_o(E)$ abgeschlossen ist, ist $\mathfrak{M}$ kompakt in $\mathcal{O}_o(E)$. Mit 1.10 a) schließen wir auf die Existenz einer kleinsten Kugel, die X enthält; d.h. X hat eine Umkugel.

Ist X zudem schwach abgeschlossen (also schwach kompakt), dann ist die Menge aller Kugeln, die in X enthalten ist, kompakt in $\mathcal{O}_o(E)$.

Denn setzt man A := X und sind $\mathfrak{M}_s$ und $\mathfrak{M}_b$ wie in 3.3 definiert, dann ist die Menge aller in X enthaltenen Kugeln gleich $\mathfrak{M}_s \cap \mathfrak{M}_b$. Mit 1.10 a schließen wir auf die Existenz einer größten Kugel, die in X enthalten ist. ∎

Bemerkung:

(1) Garkavi zeigt noch allgemeiner:
Ist E der Dualraum eines normierten linearen Raumes E, dann hat jede nicht leere und beschränkte Menge $X \subset E$ eine Umkugel (s. [17, Th. 2]).

Als Korollar erhält er:

Existiert eine Projektion von E" auf E der Norm 1, dann hat jede nicht leere und beschränkte Menge $X \subset E$ eine Umkugel (s. [17, Th. 2]).

Auch diese beiden Existenzsätze kann man mit dem verallgemeinerten Blaschkeschen Auswahlsatz (von Dierolf) zeigen, indem man anstelle von $(\mathcal{O}_o(E), \tau(\sigma(E,E')))$ den Raum $(\mathcal{O}_o(E)_{\tilde{E}}, \tau(\sigma(E,\tilde{E}))$ betrachtet.

Dabei ist $\mathcal{O}_o(A)_{\tilde{E}}$ für $A \subset E$ wie folgt definiert:

$\mathcal{O}_o(A)_{\tilde{E}} := \{M \in \mathcal{O}_o(A) : M$ ist $(E,\tilde{E})$ - abgeschlossen$\}$.

Wie in 3.4 kann man zeigen, daß für alle nicht leeren und beschränkten Mengen $X \subset E$ $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}$ wie im Beweis zu 3.4 definiert) in $\mathcal{O}_o(E)_{\tilde{E}}$ bzgl. $\tau(\sigma(E,\tilde{E}))$ kompakt ist. Der Beweis benötigt keine wesentlich neuen Argumente.

Garkavi zeigt, daß die von ihm angegebenen Bedingungen an E nicht notwendig dafür sind, daß jede nicht leere und beschränkte Menge $X \subset E$ eine Umkugel hat (s. [17,p.118]).

(2) Es gilt jedoch:

E ist ein Banachraum, wenn jeder konvexe Körper in E eine Umkugel oder eine Inkugel hat.
Ist E kein Banachraum, $\hat{E}$ die vollständige Hülle von E, $U_{\hat{E}}$ die Einheitskugel in $\hat{E}$ und $x \in \hat{E} \setminus E$, dann ist
$M := (x + U_{\hat{E}}) \cap E$ ein Eikörper in E mit $r(M)=R(M)=1$; $\mathfrak{R}M$ und $\mathfrak{r}M$ sind jedoch leer.

(3) Wegen $R(M) = R(\overline{con}(M))$

(für alle nicht leeren und beschränkten Mengen $M \subset E$)

ist jede Umkugel von $\overline{con}(M)$ auch Umkugel von M und umgekehrt.
Daher werden wir uns im folgenden stets auf die konvexen Körper beschränken.

In 3.5 zeigen wir, daß jeder konvexe Körper $M \subset C(Q)$ eine Umkugel hat. Der Fall $Q = [a,b] \subset \mathbb{R}$ ist bereits von Zamjatin und Kadec' gezeigt (s. [38]).

3.5 Es sei $M \subset E = C(Q)$ ein konvexer Körper und für alle $t \in Q$ sei

$$f(t) := H(x'_t, M) \text{ und } g(t) := -H(-x'_t, M) .$$

Es gilt:

(a) Die Menge der Umkugelmittelpunkte von M ist nicht leer.

(b) Ist M ein Eikörper und gilt

$$M = \{ x \in E : g \leq x \leq f \} ,$$

dann ist die Menge der Inkugelmittelpunkte nicht leer.

Beweis: (Wir verwenden die Bezeichnungen von § 2, Seite 31 f.)

(a)
Ist $y \in E$, dann gilt nach 1.11 a

$$\rho(y,M) = \sup_{x' \in U'} H(x', M - y)$$

$$\geq \max \{ \sup_{x' \in \mathcal{E}'} H(x', M-y), \sup_{-x' \in \mathcal{E}'} H(x', M-y) \}$$

$$= \max \{ \sup_{t \in Q} [f(t) - y(t)], \sup_{t \in Q} [y(t) - g(t)] \}$$

Damit gilt für alle $y \in E$:

$$\rho(y,M) \geq f - y \quad \text{und} \quad \rho(y,M) \geq y - g .$$

Setzen wir

$$\tilde{f}(t) := \limsup_{t' \to t} f(t') \quad , \quad g(t) := \liminf_{t' \to t} g(t')$$

$(\forall\, t \in Q)$, dann ist für alle $y \in E$ (y stetig!)

$$\limsup_{t' \to t} (f-y)(t') = \tilde{f}(t) - y(t) \leq \rho(y,M) ,$$

$$\limsup_{t' \to t} (y-g)(t') = y(t) - \tilde{g}(t) \leq \rho(y,M)$$

$(\forall\, t \in Q)$ (s. [4, Chap. 4, § 5, Cor. 1 du prop. 13]).

Somit gilt für alle $y \in E$ die Ungleichung

$$\rho(y,M) \geq \frac{1}{2} (\tilde{f} - \tilde{g}) ,$$

und wegen

$$R(M) = \inf_{y \in E} \rho(y,M) \qquad \text{(s. 1.11 b)}$$

ist

$$2\, R(M) \geq \tilde{f} - \tilde{g} \qquad (\rightleftarrows \tilde{f} - R(M) \leq \tilde{g} + R(M)).$$

Wie im Beweis zu 2.5 b zeigt man, daß die Menge

$$N_R := \{x \in E : \tilde{f} - R(M) \leq x \leq \tilde{g} + R(M)\}$$

nicht leer ist.

Für alle $y \in N_R$ und $x \in M$ gilt:

$$x - y \leq f - \tilde{f} + R(M) \leq R(M) \qquad \text{und}$$

$$y - x \leq \tilde{g} - g + R(M) \leq R(M) \quad ;$$

und somit ist für alle $y \in N_R$

$$\rho(y,M) \leq R(M) .$$

M. a. W.: Jeder Punkt von N_R ist ein Umkugelmittelpunkt von M.

(b)

Für alle $t \in Q$ gilt :

$$f(t) - g(t) = B(x'_t, M) \geq D(M) \geq 3\, r(M)$$

(s. 1.11 e) .

Wie in 2.5 b zeigt man, daß

$$N_r := \{x \in E \ : \ g + r(M) \leq x \leq f - r(M)\}$$

nicht leer ist.

Wegen $M = \{x \in E \ : \ g \leq x \leq f\}$ besteht für alle $y \in N_r$ die folgende Inklusion

$$y + r(M)U \subset M;$$

d.h. $\partial M \neq \emptyset$. ∎

Bemerkung:

(4) Wie für geometrisch vollständige Mengen in $C(Q)$ kann man zeigen, daß

$$M \equiv \{x \in C(Q) \ : \ f - R(M) \leq x \leq g + R(M)\}$$

gilt (s. Beweis zu 2.11).

Es ist offen, ob die Bedingung $M = \{x \in C(Q) \ : \ g \leq x \leq f\}$ aus 3.5 b nicht fallengelassen werden kann.

Ist Q vollständig regulär und extrem unzusammenhängend, dann ist nach 2.5 c jede geometrisch vollständige Menge $M \subset C(Q)$ eine Kugel; d.h. jede geometrische Vervollständigung (s. 2.6) eines konvexen Körpers $N \subset C(Q)$ ist eine Kugel, deren Radius die Hälfte des Durchmessers von N beträgt. Somit besitzt jeder konvexe Körper $M \subset C(Q)$ eine Umkugel mit dem Umkugelradius $R(M) = \frac{1}{2}\ \mathrm{diam}(M)$. Allgemeiner gilt:

3.6 (a) Für E sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) Jede geometrisch vollständige Menge in E ist eine Kugel.

(2) Für jeden konvexen Körper $M \subset E$ gilt

$$R(M) = \frac{1}{2} \operatorname{diam}(M)$$

(b) Ist (1) erfüllt, dann hat jeder konvexe Körper in E eine Umkugel.

Beweis: (a) (1) $\longrightarrow$ (2) folgt aus 2.6; (2) $\rightarrow$ (1) aus 2.10.

(b) Jede geometrische Vervollständigung eines konvexen Körpers ist eine Umkugel. ∎

Bemerkung:

(5) $E = l^\infty$ ($\equiv C(\mathbb{N})$) genügt der Bedingung (1) aus 3.6 (vgl. § 2 Bem. (2)).

$$M := \{(x_i, i \in \mathbb{N}) \in l^\infty : x_i \in [0,1] \ (\forall i \in \mathbb{N}), (x_i : i \in \mathbb{N}) \text{ konvergiere gegen } 1\} .$$

M ist ein konvexer Körper mit dem Durchmesser 1, der im Rand der Einheitskugel von l^∞ enthalten ist.

Zu $(x_i : i \in \mathbb{N}) \in M$ und $\varepsilon \in (0,1)$ gibt es ein $i_o \in \mathbb{N}$, so daß für alle $i \geq i_o$

$$x_i \geq 1 - \varepsilon$$

gilt.

Für $(y_i : i \in \mathbb{N}) \in M$ mit

$$y_i := \begin{cases} 0 & i \leq i_o \\ x_i & i \geq i_o + 1 \end{cases}$$

gilt

$$\|x - y\| \geq x_{i_o} \geq 1 - \varepsilon \quad ; \text{ d.h.}$$

für alle $x \in M$ gilt $\rho(x,M) = 1$. M ist somit ein diametral maximaler konvexer Körper, der nicht geometrisch vollständig ist. Insbesondere gilt:

$$\frac{1}{2} R(M) < R_M(M) = \text{diam } (M) = 1 \quad .$$

ℓ^∞ ist ein Beispiel für einen Banachraum, in dem alle geometrisch vollständigen Mengen mit einem von 0 verschiedenen Durchmesser Eikörper sind, der jedoch keine Normalstruktur hat.
Vermutlich ist diese Aussage für alle E richtig, die der Bedingung (1) aus 3.6 genügen.

Im folgenden werden wir weitere Abschätzungen für den Umkugelradius konvexer Körper angeben.
Falls E eine Normalstruktur hat, dann existiert zu jedem konvexen Körper $M \subset E$ eine reelle Konstante $\gamma_M \in [0,1)$ mit

$$R(M) \leq R_M(M) \leq \gamma_M \cdot \text{diam}(M) \; .$$

Für diam $(M) > 0$ setze $\gamma_M := \dfrac{R_M(M)}{\text{diam}(M)}$, anderenfalls setze $\gamma_M = 0$.

Umgekehrt hat E eine Normalstruktur, wenn es zu jedem konvexen Körper $M \subset E$ eine Konstante $\gamma_M < 1$ gibt mit

$$R_M(M) \leq \gamma_M \, \text{diam}(M) \; .$$

Es gibt eine Reihe von normierten linearen Räumen, die eine Normalstruktur haben. Hierzu benötigen wir den Begriff des in allen Richtungen uniform konvexen Raumes, der zum erstenmal von Garkavi [17] verwendet wurde, um die normierten linearen

Räume zu charakterisieren, in denen jeder konvexe Körper höchstens eine Umkugel hat.

E heißt in allen Richtungen uniform konvex, wenn für alle $z \in E\setminus\{\theta\}$ und $\varepsilon > 0$ ein $\delta(=\delta(\varepsilon,z))$ existiert, so daß gilt:

Aus $x,y \in U$, $x - y = \lambda z$ und $|\lambda| \geq \varepsilon$ folgt
$\|x + y\| \leq 2\ (1 - \delta)$.

Insbesondere ist jeder uniform konvexe Raum in allen Richtungen uniform konvex.
Es gilt der Satz von Garkavi [17, Th. 6] :

3.7 Jede der folgenden Aussagen ist eine hinreichende und notwendige Bedingung dafür, daß E in allen Richtungen uniform konvex ist.

(1) In E hat jeder konvexe Körper höchstens eine Umkugel.

(2) Jeder symmetrische konvexe Körper hat in E genau eine Umkugel.

Bemerkung:

(6) Jeder in allen Richtungen uniform konvexe Raum ist strikt konvex. Die Umkehrung gilt nicht (s. Garkavi [17, p. 127]).

Andererseits gibt es in allen Richtungen uniform konvexe reflexive Banachräume, die zu keinem uniform konvexen Banachraum isomorph sind (s. Day, James, Swaminathan [9]).

(7) Dem Beweis von 3.7 entnehmen wir, daß jeder in allen Richtungen uniform konvexe Raum E Normalstruktur hat. Denn für jeden konvexen Körper $M \subset E$ mit $\operatorname{diam}(M) > 0$ gilt:

$$\rho\left(\frac{x+y}{2},\ M\right) < \operatorname{diam}(M) \qquad (\forall\ x,y \in M,\quad x \neq y)\ ;$$

dies bedeutet aber, daß $R_M(M) < \operatorname{diam}(M)$ ist.

Für uniform konvexe Räume gilt:

3.8 Ist E uniform konvex, dann existiert eine reelle Konstante
=== $\gamma < 1$, so daß für alle konvexen Körper $M \subset E$ gilt:

$$R_M(M) \leq \gamma \cdot \operatorname{diam}(M).$$

Beweis: Ist $\delta(\varepsilon)$ der Konvexitätsmodul von E, dann ist

$$\gamma := \inf_{\varepsilon \in (0,1)} 1 - \delta(\varepsilon) < 1 .$$

Es sei $M \subset E$ ein konvexer Körper mit $s := \operatorname{diam}(M) > 0$. (Für $s = 0$ ist die Aussage trivial.)

Zu jedem $\varepsilon \in (0,1)$ existieren $x,y \in M$ mit

$$\|x - y\| \geq s\,\varepsilon .$$

Wegen

$$\frac{1}{s}(x - m),\ \frac{1}{s}(y - m) \in U \qquad (\forall\, m \in M)$$

und

$$\frac{1}{s}\,\|(x - m) - (y - m)\| \geq \varepsilon$$

gilt für alle $m \in M$

$$\left\|\frac{x+y}{2} - m\right\| \leq (1 - \delta(\varepsilon))\, s \ ;$$

d.h. $\rho\left(\frac{x+y}{2}, M\right) \leq (1 - \delta(\varepsilon))\, s.$

Damit gilt

$$R_M(M) \leq \inf_{\varepsilon \in (0,1)} (1 - \delta(\varepsilon))\, s. \blacksquare$$

Bemerkung:

(8) Da in den normierten linearen Räumen, die in allen Richtungen uniform konvex sind, der Konvexitätsmodul δ außer von ε auch von z abhängt, kann man den obigen Schluß

nicht durchführen und eine von M unabhängige Konstante $\gamma < 1$ angeben.

In Hilberträumen ($1 - \delta(\varepsilon) = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}$) erhalten wir so für γ: $\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Die so gewonnene Konstante γ ist für Hilberträume nicht optimal; d.h. das Gleichheitszeichen besteht für keinen konvexen Körper.

Im n-dimensionalen euklidschen Raum gilt die Jungsche Ungleichung (s. [3, p. 78]):

$$R(M) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{n+1}} \operatorname{diam}(M)$$

$(\forall\, M \in \tilde{\mathcal{K}}_m^b(E))$.

Gleichheit besteht z.B. für das reguläre Simplex. Verwendet man die Aussage, daß jede orthogonale Projektion eines Hilbertraumes E auf einen abgeschlossenen Teilraum die Norm 1 hat, so erhält man mit $n \to \infty$ das unendlichdimensionale Analogon der Jungschen Ungleichung:

$$R(M) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{diam}(M) \qquad (\forall\, M \in \tilde{\mathcal{K}}_m^b(E)).$$

Routledge [30] zeigt, daß $\frac{1}{\sqrt{2}}$ für jeden unendlichdimensionalen Hilbertraum optimal ist.

(9) Klee [25] zeigt:

Für E sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) $\emptyset \neq \mathfrak{R}M \cap M \qquad (\forall\, M \in \tilde{\mathcal{K}}_m^b(E))$

(2) E ist entweder ein Hilbertraum oder 2-dimensional.

Insbesondere gilt für jeden konvexen Körper eines Hilbertraumes, daß

$$R_M(M) = R(M) .$$

Fassen wir die angestellten Überlegungen zusammen, so ergibt sich die folgende Tabelle:

Für alle konvexen Körper $M \subset E$ mit $\operatorname{diam}(M) > 0$ gilt:	Falls für E gilt:
$R(M) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{diam}(M)$	Hilbertraum
$R_M(M) \leq \gamma \operatorname{diam}(M)$	uniform konvexer Raum
$R_M(M) \leq \gamma_M \operatorname{diam}(M)$ $(\gamma_M < 1)$	in allen Richtungen uniform konvex
$R_M(M) < \operatorname{diam}(M)$	Normalstruktur
$R(M) < \operatorname{diam}(M)$	jede geometrisch vollständige Menge ist entweder ein Eikörper oder ein Punkt
$R(M) = \frac{1}{2} \operatorname{diam}(M)$	jede geometrisch vollständige Menge ist eine Kugel.

In all den aufgeführten Räumen ist jede geometrisch vollständige Menge mit einem von O verschiedenen Durchmesser ein Eikörper. Insbesondere haben wir in den uniform konvexen Räumen für geometrisch vollständige Mengen die Ungleichung

$$r(M) \geq (1-\gamma) \operatorname{diam}(M)$$

erhalten (s. 2. 9 a) .

Für einen beliebigen Eikörper eines unendlichdimensionalen normierten linearen Raumes kann man keine untere Abschätzung des Inkugelradius' angeben, wie dies für Körper des n-dimensionalen Raumes möglich ist.

§ 4 Körper konstanter Breite

Von Eggleston [14] übernehmen wir die folgenden Definitionen:

E hat die Eigenschaft

- (A) , wenn in E jede geometrisch vollständige Menge von konstanter Breite ist,
- (B) , wenn in E jede geometrisch vollständige Menge eine Kugel ist,
- (C) , wenn in E jeder Körper konstanter Breite eine Kugel ist.

Insbesondere hat E mit der Eigenschaft (B) auch die Eigenschaft (A) und (C) (s. § 2).

Beispiele für Banachräume, die die Eigenschaft (B) oder (C) haben, geben wir in § 2.

Für die normierten linearen Räume mit der Eigenschaft (B) haben wir mit 3.6 einen Charakterisierungssatz angegeben.
Anhand von Beispielen hat Eggleston [14] gezeigt, daß sich mit den bekannten Glattheits- und Konvexitätsbegriffen die normierten linearen Räume mit der Eigenschaft (A) nicht charakterisieren lassen. So gibt er ein Beispiel einer geometrisch vollständigen Menge eines uniform konvexen, glatt konvexen, endlichdimensionalen Banachraumes, die nicht von konstanter Breite ist. Andererseits gibt es nicht strikt konvexe, nicht flach konvexe Banachräume, die die Eigenschaft (A) haben (z. B. $E = c_o$, s. § 4 Bem. (1)). Es stellt sich die Frage, ob wenigstens im Hilbertraum die Äquivalenz der Begriffe "geometrisch vollständig" und "von konstanter Breite" besteht.
Ein Hauptteil dieses Abschnittes ist der Nachweis der Eigenschaft (A) für Hilberträume. Ferner wird für Hilberträume die Existenz nicht symmetrischer Körper konstanter Breite nachgewiesen; d.h. in Hilberträumen gibt es außer den Kugeln weitere Körper konstanter Breite.

Sind $M,N \in \tilde{\mathcal{K}}_{on}^{b}(E)$, dann heißt M zu N homothetisch (in Zeichen: $M \sim N$),

wenn es eine reelle Zahl $s > 0$ und ein $x \in E$ gibt, so daß

$$N = sM + x$$

gilt.

$\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\tilde{\mathcal{K}}_{on}^{b}(E)$.

Für die Negation von $\sim$ verwenden wir das Symbol $\not\sim$.

$M \in \tilde{\mathcal{K}}_{on}^{b}(E)$ heißt

- zerlegbar, wenn es zwei konvexe Körper $N_1, N_2 \in E$ gibt, so daß gilt:

  $M = \overline{N_1 + N_2}$ und

  $N_1 \not\sim M$ oder $N_2 \not\sim M$,

- reduzierbar, wenn es einen nicht zu M homothetischen konvexen Körper $N \subset E$ gibt mit

  $M = \overline{N - N}$.

Ist $M \in \tilde{\mathcal{K}}_{on}^{b}(E)$ nicht zerlegbar (bzw. nicht reduzierbar), dann heißt M unzerlegbar (bzw. irreduzibel).

Insbesondere können nur die bzgl. Θ symmetrischen konvexen Körper reduzierbar sein.

Mit Hilfe des obigen Reduzierbarkeitsbegriffes können wir die Räume mit der Eigenschaft (C) charakterisieren; es gilt:

E hat genau dann die Eigenschaft (C), wenn U irreduzibel ist.

Desweiteren untersuchen wir die Frage der Zerlegbarkeit von geometrisch vollständigen Mengen und insbesondere die der Zerlegbarkeit der Einheitskugel des Hilbertraumes.

So kann die Zerlegbarkeit der Einheitskugel des Hilbertraumes

(konstruktiv) gezeigt werden.

Offen bleibt, ob jeder Körper konstanter Breite des Hilbertraumes zerlegbar ist.

Mit 2.2 c haben wir bereits einen Charakterisierungssatz der Körper konstanter Breite gegeben, der mehr von theoretischen als von praktischen Interesse zu sein scheint. Dagegen ist der folgende Charakterisierungssatz der Körper konstanter Breite wesentlich einfacher anwendbar:

4.1 === Ein konvexer Körper $M \subset E$ ist genau dann von konstanter Breite, wenn

$$\widehat{\overline{M - M}} = \underline{B}(M)\ U$$

gilt.

Beweis: Nach § 1 Bem. (10) ist $B(\cdot, M)$ die Stützfunktion von $\overline{M - M}$. Damit ist M genau dann von konstanter Breite, wenn

$$H(\cdot, \overline{M - M}) = B(\cdot, M) = \underline{B}(M)\ \|\cdot\|$$

gilt. ∎

Es sei Q ein extrem unzusammenhängender vollständig regulärer Raum.

$C_o(Q)$ bezeichne den linearen Teilraum von $C(Q)$, der aus allen $x \in C(Q)$ gebildet wird, die die folgende Eigenschaft haben:

Für alle $\varepsilon > 0$ besteht die Menge

$$\{ t \in Q : |x(t) \geq \varepsilon \}$$

nur aus endlich vielen Elementen.

$C_o(Q)$ ist als abgeschlossener Teilraum $C(Q)$ ein Banachraum.

Besteht Q aus endlich vielen Elementen, dann ist $C(Q) \equiv C_o(Q)$.

4.2 Ist $M \subset C_o(Q)$ geometrisch vollständig und ist für alle $t \in \mathbb{R}$

$$u(t) := H(x_t', M) \quad \text{und} \quad o(t) := -H(-x_t', M),$$

dann gilt:

(a) M ist von konstanter Breite;

(b) M ist genau dann eine Kugel, wenn $\frac{o+u}{2} \in C_o(Q)$ ist;

(c) $\mathfrak{R}M$ ist von konstanter Breite, und es gilt:

$$\mathfrak{R}M + r(M)U = M.$$

Beweis: (a)

Wie in 2.5 zeigt man, daß gilt:

1) $M \equiv \{x \in C_o(Q) : o \leq x \leq u\}$,

2) $o + \operatorname{diam}(M) = u$

(Nach dem Beweis zu 2.5 c sind $u, o \in C(Q)$!).

Damit gilt:

$$x \in M - M \underset{1)}{\rightleftharpoons} o - u \leq x \leq u - o \underset{2)}{\rightleftharpoons} -\operatorname{diam}(M) \leq x \leq \operatorname{diam}(M);$$

d.h. $M - M = \operatorname{diam}(M)U$.

Mit 4.1 erhalten wir (a).

(b)

Ist $\frac{u+o}{2} \in C_o(Q)$, dann ist $\frac{u+o}{2}$ Symmetriepunkt

von M; d.h. M ist eine Kugel (s. 1.13).

(c)
läßt sich analog zu 2.11 beweisen. ∎

Bemerkung:

(1) Nach 4.2 ist in $c_o = C_o(\mathbb{N})$ jede geometrisch vollständige Menge von konstanter Breite.
So ist

$$M := \{(x_n : n \in \mathbb{N}) \in c_o : 0 \leq x_n \leq 1 \quad (\forall\, n \in \mathbb{N})\}$$

ein Körper konstanter Breite in c_o, der kein Eikörper ist.

Damit gilt wie für geometrisch vollständige Mengen, daß ein Körper konstanter Breite $M \subset E$ nicht notwendigerweise ein Eikörper ist, falls M einen von 0 verschiedenen Durchmesser hat.

Im folgenden Satz fassen wir einige Resultate von § 2 zusammen, die für Körper konstanter Breite gültig bleiben.

4.3 Ist $M \in \tilde{\mathcal{K}}_{om}^{b}(E)$ von konstanter Breite, dann gilt:

a) $r(M) + R(M) = \operatorname{diam}(M)$;

b) $\Re M = \Gamma M$,

zu jeder Umkugel von M gibt es eine konzentrische Inkugel;

c) $M = \bigcap_{m \in M} (m + \operatorname{diam}(M)U)$;

d) M ist diametral maximal.

Beweis: S. 2.2, 2.9 und 2.13.

Ist $M \subset E$ ein konvexer Körper, x ein Randpunkt von M und $y \in M$, dann heißt $y + \operatorname{diam}(M)U$ Stützkugel an M im Punkt x, wenn

$$M \subset y + \operatorname{diam}(M)U \quad \text{und} \quad x \in y + \operatorname{diam}(M)S$$

gilt.

Ist M ein Körper konstanter Breite des n-dimensionalen euklidschen Raumes, dann geht durch jeden Randpunkt x von M eine Stützkugel (s. Eggleston [13, p. 123]); insbesondere ist jeder Randpunkt x von M ein exponierter Punkt (d.h. durch x geht eine Stützhyperebene, die M nur in x trifft).
Mit 4.3 c schließen wir, daß jeder konvexe Körper des n-dimensionalen euklidschen Raumes gleich dem Durchschnitt aller seiner Stützkugeln ist; d.h. die Stützkugeln haben für die Körper konstanter Breite des n-dimensionalen euklidschen Raumes eine ähnliche Bedeutung, wie die Stützhyperebene für konvexe Mengen.

Ist E endlichdimensional und $M \subset E$ geometrisch vollständig, dann existiert zu jedem Randpunkt x von M eine Randpunkt y von M mit

$$\|x - y\| = \rho(x,M) = \operatorname{diam}(M);$$

d.h. durch jeden Randpunkt von M geht eine Stützkugel.
Ist E jedoch unendlichdimensional, dann braucht durch einen Randpunkt einer geometrisch vollständigen Menge keine Stützkugel zu gehen. Beispiel:

$$(\tfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}) \in c_o \quad \text{ist ein Randpunkt von}$$

$$M = \{(x_n : n \in \mathbb{N}) \in c_o : 0 \le x_n \le 1 \quad (\forall\, n \in \mathbb{N})\} ,$$

durch den keine Stützkugel geht; M ist von konstanter Breite (s. § 4 Bem. (1)).

4.4 Ist E reflexiv und $M \subset E$ ein Eikörper von konstanter Breite, dann geht durch jeden Randpunkt von M eine Stützkugel.

Beweis: Ist x ein Randpunkt von M, dann existiert ein $x' \in S'$ mit $H(x',M) = \langle x,x' \rangle$. Da M schwach kompakt ist, existiert ein $y \in M$ mit $H(-x',M) = \langle y,-x' \rangle$. Somit gilt:

$$\|x - y\| \geq \langle x - y,x' \rangle = B(x',M) = \operatorname{diam}(M);$$

d.h. $x \in y + \operatorname{diam}(M)S$. ∎

4.5 (a) Hat E eine Normalstruktur und die Eigenschaft (A), dann ist $M \in \bar{K}_m^b(E)$ genau dann von konstanter Breite, wenn M diametral maximal ist.

(b) Ist E außerdem reflexiv, dann ist $M \in \bar{K}_m^b(E)$ genau dann von konstanter Breite, wenn M gleich dem Durchschnitt aller Stützkugeln von M ist.

Beweis: (a)
folgt aus der Eigenschaft (A) und 2.14.

(b)
Nach 4.4 und 2.14 ist jeder Körper konstanter Breite $M \subset E$ gleich dem Durchschnitt aller Stützkugeln von M. Ist M gleich dem Durchschnitt aller Stützkugeln von M und ist N die Menge der Mittelpunkte der Stützkugeln, dann gilt:

$$M = \bigcap_{x \in N} (x + \operatorname{diam}(M)U) \supset \bigcap_{\substack{x \in M \\ (N \subset M)}} (x + \operatorname{diam}(M)U) ;$$

d.h. M ist geometrisch vollständig und somit von konstanter Breite (E hat Eigenschaft (A)!). ∎

Hilberträume haben Normalstruktur (s. § 3) und sind reflexiv. Im folgenden zeigen wir, daß sie auch die Eigenschaft (A) haben. Der in Bonnessen-Fenchel [3] für den endlich dimensionalen Fall angegebene Beweis läßt sich in modifizierter Form auf Hilberträume beliebiger Dimension übertragen.

4.6 Ist E ein Hilbertraum und $M \subset E$ eine geometrisch vollständige Menge, dann gilt:

M enthält mit zwei Punkten auch jeden diese verbindenden Kreisbogen vom Radius $\geq \operatorname{diam}(M)$, der kleiner als ein Halbkreis ist.

Beweis: Es sei $x + sU$ $(s > 0)$ eine Kugel in E.

Ferner seien $u,v \in x + sU$ und $y \in E$ der Mittelpunkt eines Kreisbogens vom Radius $t \geq s$, der kleiner als ein Halbkreis ist.
L sei der lineare Teilraum, der durch x,y,u,v aufgespannt wird, und Π_L bezeichne die orthogonale Projektion von E auf L.

L ist ein höchstens 4 - dimensionaler euklidscher Raum. Es ist wohlbekannt, daß der angegebene Kreisbogen in $x + s\,\Pi_L(U)$ enthalten ist (s. [3, p. 129]).

Wegen

$$x + s\,\Pi_L(U) \subset x + sU$$

$$(\,\|\Pi_L\| = 1!)$$

ist der angegebene Kreisbogen auch in $x + sU$ enthalten. Zusammen mit der sphärischen Durchschnittseigenschaft geometrisch vollständiger Mengen (s. 2.2 a) erhalten wir die Aussage von 4.6 . ∎

4.7 Ist E ein Hilbertraum, dann gilt für alle konvexen Körper $M \subset E$:

M ist genau dann von konstanter Breite, wenn M geometrisch vollständig ist.

Beweis: Angenommen es existiert eine geometrisch vollständige Menge $M \subset E$ von nicht konstanter Breite, dann ist $\operatorname{diam}(M) > 0$, und es existiert ein $e \in S$ mit

$$s := B(e,M) < \underline{B}(M) = \operatorname{diam}(M).$$

Da E Normalstruktur hat (s. § 3), ist nach 2.14 M ein Eikörper und somit $s > 0$.

Ist $m_o \in M$ mit

$$-H(-e,M) = -\langle m_o, -e\rangle \quad ,$$

dann ist $\frac{1}{\operatorname{diam}(M)}\ (M-m_o)$ eine geometrisch vollständige Menge vom Durchmesser 1, und

$$L := \{ x \in E \ : \ \langle x,e\rangle = 0\}$$

ist eine Stützhyperebene an $\frac{1}{\operatorname{diam}(M)}\ (M-m_o)$ im Punkt Θ ; d.h. wir können o.B.d.À annehmen, daß M den Durchmesser 1 hat und daß L M in Θ stützt und $H(-e,M) = 0$ gilt.

Damit ist $H(e,M) = s$, und

$$L_e := s\,e + L$$

ist die zu L parallele Stützhyperebene an M.

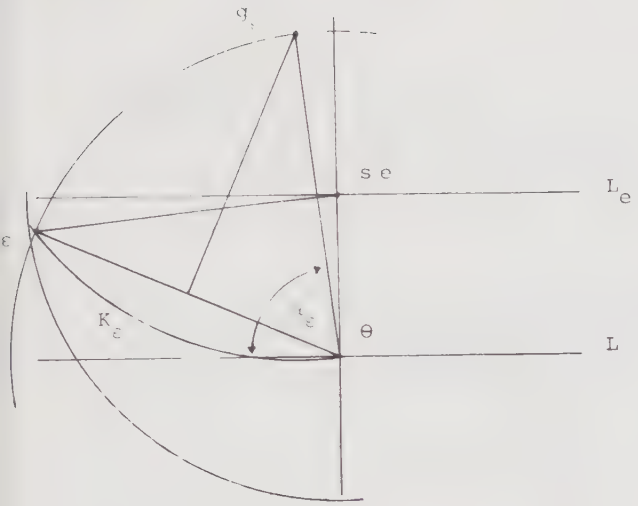
Insbesondere ist $s\,e$ kein innerer Punkt von M, so daß

$$\rho(s\,e\,,M) \geq 1$$

gilt (s. 2.13 a) .

$$\Pi(x) := x - \langle x,e\rangle\, e \qquad (\forall\, x \in E)$$

ist die orthogonale Projektion von E auf L.



(1) Zu $\varepsilon > 0$ mit $(1-\varepsilon)^2 > 2s - s^2 = 1-(1-s)^2 > 0$ existiert ein $m_\varepsilon \in M$ mit

$$\|m_\varepsilon - se\| = 1 - \varepsilon \quad .$$

Da $s \in (0,1)$ gilt, existiert stets ein $\varepsilon > 0$ mit $(1-\varepsilon)^2 > 1-(1-s)^2 > 0$.

Die Annahme

$$\|m - se\| < (1-\varepsilon) \qquad (\forall\, m \in M)$$

führt zum Widerspruch zu $\rho(se, M) \geq 1$.

Die Annahme

$$\|m - se\| > (1-\varepsilon) > s \qquad (\forall\, m \in M)$$

führt zum Widerspruch zu

$$\mathrm{dist}(se, M) \leq s \qquad (\Theta \in M!);$$

Da die Abbildung $x \mapsto \|x - se\|$ $(x \in E)$ stetig

und M zusammenhängend ist, erhalten wir zusammen mit den beiden letzten Aussagen, daß für $\varepsilon > 0$ mit $(1-\varepsilon)^2 > 2s - s^2$

$$\{m \in M : \|m - se\| = 1 - \varepsilon\} \neq \emptyset$$

gilt.

(2) Werden ε und m_ε gemäß (1) gewählt, dann sind $\Pi(m_\varepsilon)$ und m_ε von Θ verschieden.

Wegen

$$< m,e > \in [0,s] \qquad (\forall\, m \in M)$$

und

$$\|x\|^2 \geq \|\Pi(x)\|^2 = \|\Pi(x - se)\|^2$$

$$= \|x - se\|^2 - <x - se, e>^2$$

$$= \|x - se\|^2 - (<x,e> - s)^2 \qquad (\forall\, x \in E)$$

gilt:

$$\|m_\varepsilon\|^2 \geq \|\Pi(m_\varepsilon)\|^2 \geq (1-\varepsilon)^2 - s^2$$

$$> 2s - 2s^2 = 2s(1-s) > 0;$$

d.h. m_ε , $\Pi(m_\varepsilon) \neq \Theta$.

Wählen wir m_ε , $\varepsilon > 0$ gemäß (1), dann bilden

$$f_\varepsilon := \frac{\Pi(m_\varepsilon)}{\|\Pi(m_\varepsilon)\|} \quad \text{und } e$$

in der von ihnen aufgespannten Ebene ein Orthogonalsystem; die von f_ε , e aufgespannte Ebene bezeichnen wir mit E_ε.

Behauptung: Zu m_ε existiert ein $g_\varepsilon \in E_\varepsilon$ mit den folgenden Eigenschaften:

a) $\|g_\varepsilon\| = \|m_\varepsilon - g_\varepsilon\| = 1$, $<g_\varepsilon, e> > 0$,

b) der in der Skizze angegebene Winkel α_ε zwischen f_ε und g_ε ist echt kleiner als $\frac{\pi}{2}$ und größer als 0.

Aus a) folgt wegen $\|m_\varepsilon\| \leq 1$, daß der m_ε und Θ verbindende Kreisbogen K_ε (s. Skizze) mit dem Radius 1 und dem Mittelpunkt in g_ε echt kleiner als ein Halbkreis ist. Aus (b) erhalten wir, daß der Kreisbogen K_ε L durchsetzt. Nach 4.6 ist K_ε in M enthalten, was aber unmöglich ist, da L Stützhyperebene an M ist; d.h. M muß von konstanter Breite sein. Es gilt daher, die obige Behauptung zu beweisen.

Es sei

$$\lambda := \langle m_\varepsilon, e\rangle \quad \text{und} \quad \mu := \|\Pi(m_\varepsilon)\| \quad ,$$

dann gilt:

(3) $m_\varepsilon = \lambda e + \mu f$ und

$$g_\varepsilon := \frac{1}{2} m_\varepsilon + t_\varepsilon g$$

mit

$$g := e - \frac{\lambda}{\mu} f, \quad t_\varepsilon := \mu\left(\frac{1}{\mu^2+\lambda^2} - \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ und}$$

g_ε erfüllt a)

Der Beweis von (3) erfolgt durch einfaches Ausrechnen.

Insbesondere ist

$$g_\varepsilon = (\frac{\lambda}{2} + t_\varepsilon)\, e + (\frac{\mu}{2} - t_\varepsilon\frac{\lambda}{\mu})\, f_\varepsilon \quad ,$$

und damit gilt für den Winkel α_ε :

$$\cos \alpha_\varepsilon = \frac{\langle g_\varepsilon , f_\varepsilon \rangle}{\| g_\varepsilon \| \, \| f_\varepsilon \|} = \langle g_\varepsilon , f_\varepsilon \rangle$$

$$= \frac{\mu}{2} - t_\varepsilon \frac{\lambda}{\mu}$$

$$= \frac{\mu}{2} - \lambda \left(\frac{1}{\mu^2 + \lambda^2} - \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Wegen

$$\| m_\varepsilon \|^2 = \| \Pi(m_\varepsilon) \|^2 + \langle m_\varepsilon , e \rangle^2$$

$$= \mu^2 + \lambda^2$$

gilt:

$$(4) \quad \cos \alpha_\varepsilon = \frac{\| \Pi(m_\varepsilon) \|}{2} - \langle m_\varepsilon , e \rangle \left(\frac{1}{\| m_\varepsilon \|^2} - \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Aus

$$\| \Pi(m_\varepsilon) \|^2 = \| \Pi(m_\varepsilon - s\, e) \|^2$$

$$= \| m_\varepsilon - s\, e \|^2 - \langle m_\varepsilon - s\, e, e \rangle^2$$

$$= (1-\varepsilon)^2 - [\langle m_\varepsilon , e \rangle - s]^2$$

$$\leq (1-\varepsilon)^2$$

$$(\langle m, e \rangle \in [0, s])$$

erhalten wir:

$$\cos \alpha_\varepsilon \leq \frac{\| \Pi(m_\varepsilon \|}{2} \leq \frac{1 - \varepsilon}{2} < \frac{1}{2} \quad ;$$

d.h. $\alpha_\varepsilon > 0$.

Setzen wir:

$$g(t) := (1-\varepsilon)^2 + 2\,s\,t - s^2 \quad \text{und}$$

$$f(t) := \frac{1}{2}\,(g(t) - t^2)^{\frac{1}{2}} - t\,(\frac{1}{g(t)} - \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}$$

$(\forall\ t \in [0,s])$,

dann folgt mit (4) aus

$$\|\Pi(m_\varepsilon)\|^2 = \|m_\varepsilon\|^2 - \langle m_\varepsilon, e\rangle^2 \quad \text{und}$$

$$\|m_\varepsilon - s\,e\|^2 = \|m_\varepsilon\|^2 - 2\,s\,\langle m_\varepsilon, e\rangle + s^2 \ ,$$

daß

$$\cos \alpha_\varepsilon = f\,(\langle m_\varepsilon, e\rangle)$$

gilt.

f ist eine auf [0,s] monoton fallende Funktion, die in s ein Minimum hat.

Wegen

$$(1-\varepsilon)^2 > 2\,s - s^2$$

gilt:

$$\frac{1}{4}(1-\varepsilon)^2 > \frac{1}{4}\,(2\,s - s^2) > \frac{s^2}{(1-\varepsilon)^2+s^2} - \frac{s^2}{4} \ .$$

Und somit haben wir für f(s) die Abschätzung:

$$f(s) = \frac{1-\varepsilon}{2} - s\,(\frac{1}{(1-\varepsilon)^2+s^2} - \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}$$

$$> \frac{1-\varepsilon}{2} - \frac{1-\varepsilon}{2} = 0;$$

d.h. $\alpha_\varepsilon < \frac{\Pi}{2}$ ($<m_\varepsilon, e> \in [0,s]$!) .

Damit ist die Behauptung und somit 4.7 vollständig bewiesen. ∎

Als Korollar zu 2.6 und 4.7 erhalten wir:

4.8 === Ist E ein Hilbertraum, dann ist jede nicht leere, beschränkte Menge $M \subset E$ in einem Körper konstanter Breite der Breite diam(M) enthalten.

Bemerkung:

(2) 4.8 ist in jedem normierten linearen Raum, der die Eigenschaft (A) hat, gültig. Hierbei sind die normierten linearen Räume von besonderem Interesse, die außer den Kugeln noch weitere Körper konstanter Breite besitzen; d.h. normierte lineare Räume, die die Eigenschaft (A) und nicht die Eigenschaft (C) haben. Ein Beispiel eines solchen Raumes haben wir in § 4 Bem. (1) gegeben ($E = c_0$) . Zusammen mit 4.8 und einem Ergebnis von Routledge [30] erhalten wir für Hilberträume:

4.9 === In jedem Hilbertraum E der Dimension ≥ 2 gibt es Körper konstanter Breite, die keine Kugeln sind.

Beweis: Falls E endlichdimensional ist, siehe hierzu z. B. [3, § 15].
Ist E unendlichdimensional, so hat Routledge [30] die Existenz eines konvexen Körpers $M \subset E$ mit

$$R(M) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{diam}(M) \quad , \quad \operatorname{diam}(M) > 0$$

nachgewiesen. Nach 4.8 existiert ein Körper konstanter Breite $N \subset E$ mit

$$M \subset N \quad \text{und} \quad \operatorname{diam}(M) = \operatorname{diam}(N).$$

Und es gilt

$$R(M) \leq R(N) \underset{(s.\S3)}{\leq} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{diam}(N) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{diam}(M);$$

d.h. $R(N) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{diam}(N)$.

Nach 4.3 a ist $r(N) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \operatorname{diam}(N)$, und somit ist N keine Kugel. ■

Bemerkung:

(3) Mit 4.1 gilt $N - N = \underline{B}(N)U$; d.h. die Einheitskugel eines jeden Hilbertraumes läßt sich in zwei nicht symmetrische Körper konstanter Breite zerlegen. Die Einheitskugel eines Hilbertraumes ist somit reduzierbar.
Allgemeiner gilt:

4.10 ==== E hat genau dann die Eigenschaft (C), wenn U irreduzibel ist.

Beweis: Hat E die Eigenschaft (C) und ist $M \subset E$ ein konvexer Körper mit $\overline{M - M} = U$,
dann gilt

$$B(x', \overline{M-M}) = H(x', \overline{M-M}) = 1 \qquad (\forall\, x' \in S')$$

(s. §1 Bem. (10) ;

d.h. M ist von konstanter Breite und somit eine Kugel. Da jede Kugel mit einem von O verschiedenen Radius zu U homothetisch ist, ist U irreduzibel.
Ist U irreduzibel, dann folgt aus 4.1, daß jeder Körper konstanter Breite $M \subset E$ mit $\operatorname{diam}(M) > O$ zu U homothetisch ist. Dies ist aber nur möglich, wenn M eine Kugel ist. ■

Bemerkung:

(4) Mit 4.10 ist ein einfaches Kriterium gegeben, das die normierten linearen Räume mit der Eigenschaft (C) von denen unterscheidet, die nicht die Eigenschaft (C) haben. Ist insbesondere E endlichdimensional, so hat Gale [16] eine Liste von reduzierbaren und irreduziblen konvexen Körpern angegeben, die es uns ermöglicht, eine Reihe von endlichdimensionalen Banachräumen mit und ohne die Eigenschaft (C) angeben zu können.

(5) Ergänzend hierzu sei der Satz von Shephard [31] vermerkt, der sich direkt auf beliebiges E übertragen läßt:
Ein konvexer Körper $M \subset E$, der bzgl. Θ symmetrisch ist, ist genau dann reduzierbar, wenn M so zerlegbar ist, daß einer der Summanden der Zerlegung nicht symmetrisch ist.

Nachdem wir uns mit der Frage der speziellen Zerlegbarkeit der Einheitskugel beschäftigt haben, werden wir im letzten Teil dieses Paragraphen die Frage untersuchen, welche konvexen Körper sich zerlegen lassen.
Einen Überblick über bekannte Resultate von Zerlegungen von Polyedern vermittelt Shephard [19, § 15] . Dabei ist sehr wenig über die Zerlegbarkeit beliebiger konvexer Körper bekannt. Lediglich im Fall der euklidschen Ebene ist das Problem der Zerlegbarkeit konvexer Körper vollständig gelöst: Strecken und Dreiecke sind die einzigen unzerlegbaren konvexen Körper. Wir werden uns daher auf die Frage der Zerlegbarkeit von speziellen konvexen Körpern konzentrieren.

In 2.11 haben wir gezeigt, daß sich jeder nicht symmetrische, geometrisch vollständige Eikörper $M \subset C(Q)$ in

$$M \quad \text{und} \quad r(M)U$$

$(r(M)U \not\subset M!)$ zerlegen läßt. Entsprechendes gilt für nicht

symmetrische Eikörper von konstanter Breite in c_o (s. 4.2).

Sind x_i (i=1,2,3) drei äquidistante Punkte der euklidschen Ebene mit dem Abstand $s > 0$, dann ist bekanntlich des Reuleaux-Dreieck

$$M = \bigcap_{i=1,2,3} (x_i + s\,U)$$

ein Körper konstanter Breite (s. [21]).

M hat jedoch keine Zerlegung der Gestalt

$$M = N + \varepsilon\ U \quad , \qquad \varepsilon > 0 \ .$$

Denn $H(\cdot,M) - \varepsilon\|\cdot\|$ ist für $\varepsilon > 0$ keine Stützfunktion eines konvexen Körpers. Somit können wir für beliebige normierte lineare Räume E und beliebige geometrisch vollständige Mengen $M \subset E$ eine Zerlegung der Gestalt $\overline{N + s\,U}$ $(s > 0)$ nicht erwarten. Die Frage lautet daher: Kann man konstruktiv eine geometrisch vollständige Menge (und speziell einen Körper konstanter Breite) in zwei konvexe Körper zerlegen?

Da die geometrisch vollständigen Mengen (s. § 2) in enger Beziehung zu den Kugeln stehen, liegt es nahe, zunächst die Zerlegbarkeit von Kugeln zu untersuchen. Wegen seiner einfachen geometrischen Struktur ist hierfür die Einheitskugel eines Hilbertraumes besonders gut geeignet.

Für den Rest dieses Paragraphen sei E stets ein Hilbertraum. Ferner sei $e \in S$,

$$L := \{x \in E : \langle x,e\rangle = 0\} \ ,$$

$$L_e := e + L \ ,$$

$$L_+ := \{x \in E : \langle x,e\rangle > 0\} \ ,$$

$$N_e := \{x \in U\backslash S : x \in L\} + e \ ,$$

$$K_e := \{s\,y : y \in N_e,\ s > 0\} \quad \text{und}$$

$$\Pi(x) := x - \langle x,e\rangle\, e \qquad (\forall\, x \in E) \ .$$

Ist H_1 die Stützfunktion eines konvexen Körpers $M \subset E$, dann ist

$$H_2 := \|\cdot\| - H_1$$

positiv homogen und stetig.

Im allgemeinen ist H_2 nicht subadditiv.

Nach 1.4 ist H_2 genau dann die Stützfunktion eines konvexen Körpers $N \subset E$, wenn H_2 subadditiv ist; d.h. U ist genau dann die Minkowskische Summe zweier konvexer Körper, wenn es eine Stützfunktion H_1 eines konvexen Körpers gibt, so daß $H_2 := \|\cdot\| - H_1$ subadditiv ist.

Für das weitere sei C ein konvexer Kegel mit der Spitze in Θ.

Offenbar können wir U als Minkowskische Summe zweier konvexer Körper darstellen, wenn wir eine Stützfunktion H_1 finden können, die auf $E \setminus C$ mit $\frac{1}{2}\|\cdot\|$ übereinstimmt und für die $\|\cdot\| - H_1$ auf C subadditiv ist. Bei geeigneter Wahl von H_1 auf C ist dann U zerlegbar.

4.11 Ist f eine auf L_e konvexe, stetige, nicht negative reelle Funktion mit

$$f|_{L_e \setminus N_e} = \frac{1}{2}\|\cdot\|$$

dann ist

$$F(x) := \begin{cases} \langle x,e\rangle\, f\left(\frac{x}{\langle x,e\rangle}\right) & x \in K_e \\ \frac{1}{2}\|x\| & x \in E \setminus K_e \end{cases}$$

die Stützfunktion eines konvexen Körpers.

Beweis: Zunächst gilt:

$$(*) \qquad F(x) = \langle x,e\rangle \; f\left(\frac{x}{\langle x,e\rangle}\right) \qquad (\forall\, x \in L_+) \; .$$

Der Beweis von (*) folgt aus den Definitionen von F, K_e und der Voraussetzung, daß $f|_{L_e \setminus N_e} = \frac{1}{2} \|\cdot\|$ gilt.

Da E reflexiv ist, ist nach 1.4 F genau dann die Stützfunktion eines konvexen Körpers, wenn F positiv homogen, subadditiv und stetig ist.

1) Der Definition von F entnimmt man, daß F positiv homogen ist.

2) F ist subadditiv.

   F ist offenbar subadditiv, wenn für alle $x,y \in E$ gilt, daß F auf

   $$M_{x,y} := \operatorname{con}(\{x,y\})$$

   konvex ist.

   Es sei

   $$g(s) := F(s\,x + (1-s)y) \; ,$$

   dann gilt:

   F ist auf $M_{x,y}$ genau dann konvex, wenn g auf $[0,1]$ konvex ist. Nach [29, Th. 24.1, Th. 24.2] ist $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ genau dann konvex, wenn g'_+ (g'_+ bezeichne die rechtsseitige Abbildung von g) auf $(0,1)$ monoton wachsend ist.

   Bevor wir zeigen können, daß g'_+ monoton wachsend ist, benötigen wir noch einige weitere Aussagen über F.

(**) F ist auf $E \setminus K_e$ und L_+ konvex.

Da die Norm auf $E \setminus K_e$ konvex ist, ist auch F auf $E \setminus K_e$ konvex.

Wegen

$$F(x) + F(y) \underset{(*)}{=} t_x f(\frac{1}{t_x} x) + t_y f(\frac{1}{t_y} y)$$

$$= (t_x + t_y) \left[\frac{t_x}{t_x+t_y} f(\frac{x}{t_x}) + \frac{t_y}{t_x+t_y} f(\frac{y}{t_y}) \right]$$

$$\underset{(f \text{ konvex})}{\geq} (t_x + t_y) \; f \; (\frac{x + y}{t_x + t_y})$$

$$\underset{\substack{(F \text{ positiv} \\ \text{homogen})}}{=} F(x+y) \qquad (\forall\, x,y \in L_+),$$

$t_x := \langle x,e \rangle$ und $t_y := \langle y,e \rangle$,

ist F auf L_+ subadditiv und somit konvex.

(***) F ist auf jeder Geraden durch Θ konvex. Auf allen Geraden durch Θ , die in $E \setminus K_e$ liegen, ist F wegen (**) konvex. Es sei daher $x \in K_e$ und $y \in -K_e$; d.h. $y = -s\,x$ mit $s := \frac{\|y\|}{\|x\|}$.

Aus der Annahme

$$F(x + y) > F(x) + F(y)$$

und der positiven Homogenität von F folgt

$$-s\,F(x) > \frac{1}{2} \|y\| \qquad \text{falls } s < 1 ,$$

$$-\frac{1}{2} \|x\| > F(x) \qquad \text{falls } s = 1 \text{ und}$$

$$-\frac{1}{2} \|x\| > F(x) \qquad \text{falls } s > 1 ;$$

d.h. F nimmt negative Werte an. Dies kann nicht sein, da mit f auch F nicht negativ ist. Somit ist F auf jeder Geraden durch θ konvex.

Falls $M_{x,y}$ in eine der drei Mengen $E \setminus K_e$, L_+ und $-K_e \cup K_e \cup \{\theta\}$ enthalten ist, ist g nach (**) und (***) konvex. Wir können daher o.B.d.A. annehmen, daß $x \in K_e$ und $y \in (E \setminus K_e \cup -K_e) \cap (E \setminus L_+)$ gilt. Aus der Wahl von x und y und der Definition von K_e können wir auf die Existenz zweier Zahlen $s_1, s_2 \in (0,1)$ mit

$$s_1 > s_2$$

$$\{s\,x + (1-s)y \;:\; s \in (0,s_1)\} \subset L_+ \qquad \text{und}$$

$$\{s\,x + (1-s)y \;:\; s \in (s_2,1)\} \subset E \setminus K_e$$

schließen.

Nach (**) ist g'_+ auf $(0,s_1)$ und $(s_2,1)$ monoton wachsend, und wegen $s_1 > s_2$ ist g'_+ auf $(0,1)$ monoton wachsend; d.h. g ist konvex auf $[0,1]$.

3) F ist stetig.

Angenommen F ist auf U nicht beschränkt, dann existiert eine Folge $(x_n : n \in \mathbb{N})$ in U, so daß

$$\lim_{n \to \infty} F(x_n) = +\infty \qquad \text{gilt.}$$

Da F auf $U \cap (E \setminus K_e)$ beschränkt ist, können wir o.B.d.A. annehmen, daß $x_n \in K_e \cap U \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N})$ gilt.

Wegen

$$\langle x_n, e\rangle \leq 1 \quad , \quad \frac{x}{\langle x_n, e\rangle} \in N_e$$

und der Stetigkeit von f auf L_e ist

$\{F(x_n) = \langle x_n, e\rangle \; f\left(\frac{x_n}{\langle x_n, e\rangle}\right) : n \in \mathbb{N}\}$ im Widerspruch zur Annahme beschränkt; d.h. F ist stetig. ∎

Als Korollar erhalten wir:

4.12 Sind die Funktionen f,F wie in 4.11 gewählt, dann ist

$$F(x) := \frac{1}{2}\,(F(x) + F(-x))$$

$$= \begin{cases} |\langle x,e\rangle| \; f\left(\frac{x}{\langle x,e\rangle}\right) + \frac{1}{2}\,\|x\| & x \in K_e \cup -K_e \\ \frac{1}{2}\,\|x\| & x \in E \setminus (K_e \cup -K_e) \end{cases}$$

die Stützfunktion eines bzgl. Θ symmetrischen konvexen Körpers.

4.13 Die Einheitskugel eines jeden Hilbertraumes ist in zwei konvexe Körper nicht konstanter Breite zerlegbar.

Beweis: Es sei

$$\varphi(t) := (1 + t^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (\forall\, t \in [0,+\infty)) \; .$$

Wegen

$$\|x\|^2 = \|\Pi(x)\|^2 + 1 \qquad (\forall\, x \in L_e),$$

gilt

$$f(x) := \varphi\left(\|\Pi(x)\|\right) = \|x\| \qquad (\forall\; x \in L_e).$$

Insbesondere ist f auf L_e konvex und stetig. Angenommen es gibt zwei reelle Funktionen

$\varphi_1 , \varphi_2 : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ mit den folgenden Eigenschaften:

1) φ_1, φ_2 sind stetig und konvex,

2) φ_1, φ_2 sind monoton und wachsend,

3) $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \frac{1}{2}\varphi(t)$ $\quad (\forall\, t \in [1,+\infty))$,

4) $\varphi_1 + \varphi_2 = f$,

dann gilt:

1') $f(x) = \varphi_1(\|\Pi(x)\|) + \varphi_2(\|\Pi(x)\|)$ $\quad (\forall\, x \in L_e)$,

2') Die Abbildungen

$x \mapsto \varphi_1(\|\Pi(x)\|)$, $x \mapsto \varphi_2(\|\Pi(x)\|)$ $\quad (\forall\, x \in L_e)$

sind konvex, nicht negativ und stetig auf L_e.

1') und 2') folgen unmittelbar aus 1) - 4) .

Es sei $f_1(x) := \varphi_1(\|\Pi(x)\|)$ und

$f_2(x) := \varphi_2(\|\Pi(x)\|)$ $\quad (\forall\, x \in L_e)$

Die Fortsetzungen von f, f_1 und f_2 gemäß 4.11 wollen wir mit F, F_1 und F_2 bezeichnen.

F, F_1 und F_2 sind nach 4.11 Stützfunktionen konvexer Körper und es gilt:

$$\|\cdot\| = F = F_1 + F_2 \ .$$

Die letzte Gleichung folgt aus den Eigenschaften der Abbildungen f, f_1, f_2 und aus der Art der Fortsetzung in 4.11.

Ansatz:

$$\tilde{\varphi}_1(t) := \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\sqrt{2}}{4}(1+t) & t \in [0,1] \\ \\ \frac{1}{2}(1+t^2)^{\frac{1}{2}} & t \in [1, +\infty) \end{array} \right\}$$

ist einmal stetig differenzierbar, konvex und monoton wachsend.

$$\tilde{\varphi}_2(t) := \varphi(t) - \tilde{\varphi}_1(t)$$

ist einmal stetig differenzierbar, konvex. Jedoch ist sie nur auf dem Intervall $[t_o, +\infty)$, $t_o = \sqrt{\frac{1}{7}}$, monoton wachsend.

Durch einfaches Nachrechnen überzeugt man sich, daß die Funktionen

$$\varphi_1(t) := \left\{ \begin{array}{ll} \varphi(t) - s_o & t \in [0,t_o] \\ \\ \tilde{\varphi}_1(t) & t \in [t_o, +\infty) \end{array} \right\} \text{ und}$$

$$\varphi_2 := \varphi - \varphi_1 \quad \text{mit}$$

$$s_o := \varphi(t_o) - \tilde{\varphi}_1(t_o) = \frac{\sqrt{7} - 1}{2\sqrt{2}}$$

die Bedingungen 1) - 4) erfüllen.

Da φ_1 kein multiplikatives Vielfaches von φ ist, können wir schließen, daß der durch F_1 bestimmte konvexe Körper nicht zu U homothetisch ist; d.h.

U ist in $M_1 := \{x \in E : \langle x,y \rangle \leq F_1(y),\ y \in E\}$ und

$M_2 := \{x \in E : \langle x,y \rangle \leq F_2(y),\ y \in E\}$

zerlegbar. Insbesondere sind M_1 und M_2 von nicht konstanter Breite. ∎

Bemerkung:

(6) Wählt man die Fortsetzung aus 4.12, dann erhält man eine Zerlegung von U in symmetrische konvexe Körper.

(7) Anstelle von φ_1 hätte man beispielsweise auch

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\sqrt{2}}{4} \ (1 + t^2) & t \in [0,1] \\ \frac{1}{2} \ (1 + t^2)^{\frac{1}{2}} & t \in [1, +\infty) \end{array} \right\}$$

für den Ansatz wählen können.

Leider sind die Verhältnisse bei einem beliebigen Körper konstanter Breite nicht so günstig. Hat ein Randpunkt y eines Körpers konstanter Breite eine Umgebung des Randes, die ganz auf einer Stützkugel durch x geht, dann läßt sich M zerlegen. Und es ist klar, wie man den Beweis des letzten Satzes modifizieren muß, um diese Aussage zu erhalten. Vermutlich läßt sich jeder Körper konstanter Breite eines Hilbertraumes zerlegen.

§ 5 Fixpunktsätze mengenwertiger nicht expansiver Abbildungen

Es sei (X,d) ein metrischer Raum, $\mathcal{L}_0(X)$ die Menge aller nicht leeren, beschränkten und abgeschlossenen Teilmengen von X und d_H die Hausdorffmetrik auf $\mathcal{L}_0(X)$ (s. Anhang). Ferner sei F eine Abbildung von X in $\mathcal{L}_0(X)$, k eine reelle Zahl, so daß für alle $x,y \in X$ die Ungleichung

$$d_H(F(x), F(y) \leq k \quad d(x,y)$$

erfüllt ist. Dann heißt F eine

- mengenwertige Kontraktionsabbildung (abgekürzt: m.K.), wenn k echt kleiner als 1 ist,
- mengenwertige nicht expansive Abbildung (abgekürzt: m.n.e.A.), wenn k gleich 1 ist.

$x \in X$ heißt Fixpunkt von F, wenn $x \in F(x)$ gilt.

In den letzten Jahren sind eine Reihe von Arbeiten erschienen, die die Existenz von Fixpunkten der oben definierten Abbildungen untersuchen (s. z.B. George, Sehgal und Smithson [18] , Nadler [28] , weitere Literaturangaben findet man in dem Übersichtsartikel von Smithson [33]).

Nadler [28] beweist, daß der Banachsche Kontraktionssatz [32, Th. 1.2.2.] auch für mengenwertige Kontraktionsabbildungen gilt; d.h. in einem vollständigen metrischen Raum X hat jede m.K. einen Fixpunkt. Dagegen braucht in einem vollständigen metrischen Raum eine mengenwertige nicht expansive Abbildung keinen Fixpunkt zu haben.

Ist beispielsweise E ein Banachraum und $g \in E \setminus U$, dann wird durch $x \longmapsto x + g + U \quad (\forall\, x \in E)$ eine fixpunktfreie m.n.e.A.

definiert. Unter zusätzlichen Voraussetzungen an X und F läßt sich die Existenz von Fixpunkten von m.n.e.A. nachweisen. So zeigen George, Sehgal und Smithson, daß in einem kompakten metrischen Raum jede m.n.e.A. einen Fixpunkt hat (s.[18, Bem. zu Th. 3.2]). Will man Fixpunktsätze für m.n.e.A. in allgemeinen metrischen Räumen erhalten, so werden die Forderungen an F kompliziert (s. z.B. [18]). Deshalb werden wir uns auf spezielle (nicht kompakte) metrische Räume beschränken.

Unsere Untersuchungen gehen von einem Fixpunktsatz von Browder aus [7, Th. 1]:

Ist E ein Hilbertraum und $M \subset E$ ein konvexer Körper, dann hat jede nicht expansive Abbildung $t : M \longrightarrow M$ einen Fixpunkt (d.h. es existiert ein $x \in M$ mit $t(x) = x$).
Eine Abbildung $t : M \longrightarrow M$ heißt nicht expansiv, wenn für alle $x,y \in M$

$$||t(x) - t(y)|| \leq ||x - y||$$

gilt.

Wegen

$$d_H (\{x\} , \{y\}) = ||x - y|| \qquad (\forall\, x,y \in E)$$

können wir jede nicht expansive Abbildung $t : M \longrightarrow M$ als eine mengenwertige nicht expansive Abbildung von M in $\mathfrak{K}_m(M)$ auffassen. Somit liegt die Vermutung nah, daß es weitere m.n.e.A. $P : M \longrightarrow \mathfrak{K}_m(M)$ gibt, die einen Fixpunkt haben können.

Mit Hilfe einfacher Eigenschaften der Abbildung H und einer geeigneten Verallgemeinerung des Browder-Mintyschen Begriffes des monotonen Operators (s. [7, Def. 1]) können wir die folgende Erweiterung des Browderschen Fixpunktsatzes auf m.n.e.A. zeigen (s. 5.5) :

Es sei E ein Hilbertraum, $M \subset E$ ein konvexer Körper und

$$\mathfrak{M}_e := \{N \in \mathfrak{K}_{on}(M) : N \text{ ist endlichdimensional}\}.$$

Jede mengenwertige nicht expansive Abbildung, $P : M \longrightarrow \mathfrak{K}_{on}(M)$, die M in $\mathfrak{M}_e$ abbildet, hat einen Fixpunkt.

Offen ist, ob auf die Forderung $P(M) \subset \mathfrak{M}_e$ verzichtet werden kann.

5.1 Es sei E ein Banachraum, A eine nicht leere abgeschlossene
=== Teilmenge von E und P eine m.K. von A in $\mathfrak{K}^b_{on}(A)$.
Dann hat P einen Fixpunkt.

Beweis: Analog zum Banachschen Kontraktionssatz [32, Th.1] wird der Beweis durch Angabe einer geeigneten Iteration erbracht (s. z.B. Nadler [28, Th. 5]) . ∎

5.2 Es sei E ein Banachraum, $A \in \mathfrak{K}^b_{on}(E)$ und $P : A \longrightarrow \mathfrak{K}_{on}(A)$
=== eine m.n.e.A.

Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Punkt $x_\varepsilon \in A$, dessen Minimalabstand zu $P(x_\varepsilon)$ kleiner als ε ist.

Beweis: Wegen

$$\operatorname{dist}(x, P(x)) = \operatorname{dist}(x-a, P((x-a)+a)-a)$$

$(\forall\, x, a \in A)$

können wir o.B.d.A. annehmen, daß $\Theta \in A$.

Es sei $k \in (0,1)$ beliebig gewählt.

Dann ist

$$k\,P(x) \subset A \qquad (\forall\, x \in A)$$

und

$$d_H(k\ P(x), k\ P(y)) = \sup_{x' \in U'} |H(x', k\ P(x)) - H(x', k\ P(y))| \quad (1.10)$$

$$= k\ d_H(P(x), P(y))$$

$$\leq k\ \|x - y\| \ ;$$

d.h. $k\ P$ ist eine m.K., die A in $\mathfrak{K}_{on}(A)$ abbildet.

Nach 5.1 gibt es zu jedem $k \in (0,1)$ ein $x_k \in A$ mit $x_k \in k\ P(x_k)$.

Damit ist

$$\operatorname{dist}(x_k, P(x_k)) = \operatorname{dist}(x_k, P(x_k)) - \operatorname{dist}(\tfrac{1}{k} x_k, P(x_k))$$

$$\leq \|x_k - \tfrac{1}{k} x_k\| \leq |1 - \tfrac{1}{k}| \cdot s \ ;$$

wobei $s := \sup \{\|m\| : m \in M\}$.

Zu beliebig vorgegebenen $\varepsilon > 0$ wähle man $k_\varepsilon \in (0,1)$ so, daß

$$|1 - \tfrac{1}{k}| \cdot s < \varepsilon \ ,$$

und setze $x_\varepsilon := x_{k_\varepsilon}$. ■

Zum Beweis unserer Fixpunktsätze benötigen wir den Begriff der mengenwertigen monotonen Abbildung:

Es sei E ein Hilbertraum und T eine Abbildung von E in $\mathfrak{K}_{on}^{b}(E)$.

T heißt eine mengenwertige monotone Abbildung (abgekürzt: m.m.A.), wenn für alle $x,y \in E$ die Ungleichung

$$H(x-y\ ,\ T(x)) - H(x-y,\ T(y)) \geq 0$$

gilt und T bezüglich der Hausdorffmetrik auf $\mathfrak{K}_{on}^{b}(E)$ stetig ist.

Eine stetige Abbildung t des Hilbertraumes E in sich heißt monoton, wenn für alle $x,y \in E$

$$<t(x) - t(y) , x - y > \geq 0$$

gilt.

Bemerkung:

(1) Wir haben die Definition der monotonen Abbildung von Smart [32, Def. 5.1.5] übernommen, da sie für unsere Anwendungen ausreichend ist. Die von Minty und Browder gegebene Definition der monotonen Abbildung weicht von der hier gegebenen insoweit ab, daß an die Abbildung t schwächere Stetigkeitsforderungen gemacht werden (s. [7, Def. 1]).

Wegen

$$d_H (\{t(x)\} , \{t(y)\}) = \| t(x)-t(y) \| (\forall x,y \in E)$$

und

$$H(x-y),\{t(x)\})-H(x-y),\{t(y)\}) = <t(x)-t(y),x-y> \qquad (1.2)$$

$(\forall x, y \in E)$

ist jede monotone Abbildung t als mengenwertige monotone Abbildung auffaßbar. Damit haben wir den Begriff der monotonen Abbildung auf Abbildungen von E in $\tilde{\mathfrak{K}}_{\omega}^{b}(E)$ erweitert.

5.3 Es sei E ein Hilbertraum, $M \in \tilde{\mathfrak{K}}_{\omega}^{b}(E)$ und $P : M \to \mathfrak{K}_{\omega}(M)$ eine m.n.e.A. Dann ist die Abbildung T, die durch $T(x) := x - P(x)$ $(\forall x \in M)$ definiert ist, auf M die Restriktion einer m.m.A. $\tilde{T}$.

Beweis: Nach [5, Chap. 5, § 1, Th. 1] gibt es zu jedem $x \in E$ genau ein $y_x \in M$ mit

$$\|x - y_x\| = \operatorname{dist}(x,M) .$$

Π_M bezeichne die Abbildung (1), die jedem $x \in E$ den Punkt $y_x \in M$ zuordnet.

Für Π_M gilt:

$$\|\Pi_M(x) - \Pi_M(y)\| \leq \|x - y\| \quad \text{(s.z.B.[32, Chap.5])}$$

Somit gilt für die Abbildung $\tilde{P} := P \circ \Pi$:

(i) $\tilde{P} : E \longrightarrow \mathcal{K}_\omega(M) \subset \mathcal{K}^b_\omega(E)$,

(ii) $d_H(\tilde{P}(x), \tilde{P}(y)) \leq \|x - y\|$,

(iii) $\|x - y\| \, d_H(\tilde{P}(x), \tilde{P}(y)) \geq |H(y-x,\tilde{P}(x)) - H(y-x,\tilde{P}(y))|$

(i) und (ii) folgen aus den Eigenschaften von P und Π.

(iii) Mit 1.8 haben wir

$$d_H(\tilde{P}(x),\tilde{P}(y)) = \sup_{u \in U} |H(u,P(x)) - H(u,P(y))| ,$$

und somit ist mit 1.2 für $x \neq y$

$$d_H(P(x),P(y)) \geq \frac{1}{\|x-y\|} |H(y-x),P(x)) - H(y-x,P(y))|$$

der Fall $x = y$ ist trivial.

Es sei

$$\tilde{T}(x) := x - \tilde{P}(x) \qquad (\forall\, x \in E).$$

1) Mit 1.8 und 1.2 rechnet man nach, daß

$$d_H(\tilde{T}(x),\tilde{T}(y)) \leq \|x-y\| + \|\Pi_M(x) - \Pi_M(y)\|$$
$$\leq 2 \|x-y\| \qquad (\forall\, x,y \in E)$$

(1) Π wird (metrische) Projektion oder auch metrische Retraktion von E auf M genannt (s. [5] [32]).

gilt; d.h. $T : E \longrightarrow \tilde{\mathcal{K}}^b_{\omega}(E)_{d_H}$ ist stetig.

2) Für alle $x,y \in E$ gilt:

$$H(x-y\ ,\ \tilde{T}(x)) - H(x-y,\ \tilde{T}(y)) =$$

$$\underset{(1.2)}{=} \quad \|x-y\|^2 + H(x-y,\ -\tilde{P}(x)) - H(x-y,-\tilde{P}(y))$$

$$\underset{(1.2)}{=} \quad \|x-y\|^2 + H(y-x,\quad \hat{P}(x)) - H(y-x,\ \tilde{P}(y))$$

$$\underset{(ii)}{\geq} \quad \|x-y\|\, d_H(\hat{P}(x),\ \tilde{P}(y)) + H(y-x,\tilde{P}(x)) - H(y-x,\tilde{P}(y))$$

$$\underset{(iii)}{\geq} \quad |H(y-x,\ \tilde{P}(x)) - H(y-x,\tilde{P}(y))| + H(y-x,\hat{P}(x)) -$$

$$- H(y-x,\ \tilde{P}(y))$$

$$\geq \quad 0\ .$$

T ist somit eine m.m.A. .
Da Π_M auf M eingeschränkt die Identität von M ergibt, ist auch $\tilde{T} \mid M = T \mid M$. ∎

5.4 Es sei E ein Hilbertraum und $T : E \longrightarrow \tilde{\mathcal{K}}^b_{\omega}(E)_{d_H}$ eine stetige Abbildung.

Gilt für $\underline{u} \in E$ die Ungleichung

$$H(u - \underline{u},\quad T(u)\ ) \geq 0 \qquad (\forall\ u \in E)\quad ,$$

dann ist $\Theta \in T(\underline{u})$.

Beweis: Nach 1.2 ist Θ genau dann aus $T(\underline{u})$, wenn für alle $v \in E$ die Ungleichung

$$H(v,T(\underline{u})\ ) \geq 0$$

erfüllt ist.

Angenommen es existiert ein $\underline{v} \in E \quad (\underline{v} \neq \Theta)$ mit der Eigenschaft

$$H(\underline{v}, T(\underline{u})) < 0,$$

dann gibt es ein $s > 0$, so daß für alle $v \in sU$

$$H(\underline{v}, T(\underline{u} + v)) < 0$$

gilt; denn die Abbildungen $T : E \longrightarrow \mathcal{K}_{on}^{b}(E)_{d_H}$ und $H(\underline{v}, \cdot) : \mathcal{K}_{on}^{b}(E)_{d_H} \longrightarrow \mathbb{R}$ (s. § 1 Bem. (7)) sind stetig.

Wegen

$$z := \frac{s}{\|\underline{v}\|} \underline{v} \in sU$$

gilt für $u := \underline{u} + z$

$$\frac{\|\underline{v}\|}{r} H(u-\underline{u}, T(\underline{u})) < 0$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. ■

5.5 Es sei E ein Hilbertraum, $M \subset E$ ein konvexer Körper,

$$\mathfrak{M}_e := \{ N \in \mathcal{K}_{on}(M) : N \text{ ist endlichdimensional} \}$$

und $P : M \longrightarrow \mathcal{K}_{on}(M)$ eine m.n.e.A.

Ist M kompakt oder gilt $P(M) \subset \mathfrak{M}_e$, dann hat P einen Fixpunkt.

Beweis: Nach 5.2 gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in M$, so daß gilt:

$$\text{dist } (x_n, P(x_n)) < \frac{1}{n} \quad .$$

Da M schwach kompakt ist, können wir o.B.d.A annehmen, daß die Folge $(x_n : n \in \mathbb{N})$ bereits schwach gegen $\underline{x} \in M$ konvergiert.

Es seien T, $\tilde{T}$ und $\tilde{P}$ wie in 5.3 erklärt.

Da $\tilde{T}$ nach 5.3 eine m.m.A. ist, gilt für alle $u \in E$ und $n \in \mathbb{N}$

$$H(u-x_n\ ,u-\tilde{P}(u)) - H(u-x_n,x_n-\tilde{P}(x_n)) \geq 0 \qquad (1) \ .$$

Wegen

$$\text{dist}(x_n,P(x_n)) = \text{dist } (\theta\ ,\ x_n - P(x_n))$$

$$\underset{(1.9)}{=} \sup_{u \in U} - H(u,x_n - P(x_n))$$

gilt für alle $u \in E$

$$\|u\| \text{ dist } (x_n, P(x_n)) \geq - H(u,x_n-P(x_n)).$$

Somit besteht für alle $u \in E$ und $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung:

$$H(u-x_n,u-\tilde{P}(u)) + \|u-x_n\| \text{ dist}(x_n,\tilde{P}(x_n))$$

$$\geq H(u-x_n,u-\tilde{P}(u)) - H(u-x_n,\ x_n - \tilde{P}(x_n))$$

$$\geq 0 \ .$$

---

(1) Man beachte: $\tilde{P} \mid M = P$ und $\tilde{T} \mid M = T$!

1) Ist M kompakt, dann folgt aus der schwachen Konvergenz von $(x_n : n \in \mathbb{N})$ die Konvergenz in der Normtopologie.

Nach 1.4 ist die Stützfunktion eines konvexen Körpers stetig und somit gilt für alle $u \in E$:

$$H(u - \underline{x}\ ,\ u - P(u))$$

$$= \lim_{n \to +\infty} (H(u-x_n,\ u-\tilde{P}(u)) + \|u-x_n\| \operatorname{dist}(x_n, P(x_n))) \quad (1)$$

$$\geq \liminf_{n \to +\infty} (H(u-x_n, u-\tilde{P}(u)) - H(u-x_n, x_n-\tilde{P}(x_n)))$$

$$\geq 0 .$$

Nach 5.4 ist $\Theta \in \tilde{T}(\underline{x})$, und wegen $\underline{x} \in M$ und $\tilde{T} \mid M = T$ folgt $\underline{x} \in P(\underline{x})$.

2) Ist P eine Abbildung von M in $\mathfrak{M}_e$, dann ist für alle $u \in E$ $T(u) = u - \tilde{P}(u)$ ein endlichdimensionaler konvexer Körper. Nach [20, Th. 6] ist die Stützfunktion endlichdimensionaler konvexer Körper $\sigma(E',E)$ - stetig; somit ist $H(\cdot, u - \tilde{P}(u)) : E \longrightarrow \mathbb{R}$ schwach stetig.

Somit erhalten wir aus der schwachen Konvergenz der Folge $(x_n : n \in \mathbb{N})$ gegen $\underline{x}$ wie im ersten Fall, daß $\underline{x}$ Fixpunkt von P ist.

Bemerkung:

(2) Als Korollar erhalten wir den Fixpunktsatz von Browder [7, Th. 1] :

Es sei E ein Hilbertraum und $M \subset E$ ein konvexer Körper. Dann hat jede nicht expansive Abbildung $t : M \to M$ (d.h. $\|t(x) - t(y)\| \leq \|x-y\| \quad (\forall\ x,y \in M)$) einen Fixpunkt.

(1) Die Folge $(u - x_n : n \in \mathbb{N})$ ist für festes u beschränkt, da M beschränkt ist.

Es sei A eine nicht leere Teilmenge von E. Eine Abbildung $T : A \longrightarrow \mathfrak{K}^{b}_{cm}(E)$ heißt im Punkt $x \in A$

- <u>oberhalbstetig</u>, wenn es zu jeder offenen Menge $O \subset E$ mit $T(x) \subset O$ ein $s > 0$ gibt, so daß für alle $y \in (x + sU) \cap A$ $T(y) \subset O$;

- <u>schwach oberhalbstetig</u>, wenn es zu jeder schwach offenen Menge $O \subset E$ mit $T(x) \subset O$ eine schwach offene Nullumgebung V gibt, so daß für alle $y \in (x+V) \cap A$ $T(y) \subset O$.

<u>T</u> heißt auf <u>A oberhalbstetig</u> (bzw. <u>schwach oberhalbstetig</u>) wenn T in allen Punkten $x \in A$ oberhalbstetig (bzw. schwach oberhalbstetig) ist.

Insbesondere ist jede stetige Abbildung $T : A \longrightarrow \mathfrak{K}^{b}_{cm}(E)_{d_H}$ oberhalbstetig.

<u>Bemerkung:</u>

(3) In den folgenden Fällen läßt sich 5.5 bekannten Fixpunktsätzen unterordnen:

1) E ist endlichdimensional.

5.5 ist ein Spezialfall des Fixpunktsatzes von Kakutani [32, Th. 9.1.6] :

Ist M ein konvexer Körper des n-dimensionalen euklidschen Raumes, dann hat jede auf M oberhalbstetige Abbildung $T : M \longrightarrow \mathfrak{K}_{c}(M)$ einen Fixpunkt.

2) M ist kompakter konvexer Körper.

5.5 ergibt sich aus dem Fixpunktsatz von Bohnenblust und Karlin [32, Th. 9.2.2] , der den Fixpunktsatz von Kakutani auf normierte lineare Räume erweitert.

3) P ist zusätzlich schwach oberhalbstetig auf M.

5.5 folgt aus dem Fixpunktsatz vom Ky Fan [15] ([1]) :

Ist M ein schwach kompakter konvexer Körper eines normierten linearen Raumes, dann hat jede auf M schwach oberhalbstetige Abbildung $T : M \longrightarrow \mathfrak{K}_{\omega}(M)$ einen Fixpunkt.

Da die Abbildung P aus 5.5 nicht schwach oberhalbstetig zu sein braucht, haben wir für den Fall, daß M nicht kompakt ist, einen neuen Fixpunktsatz für m.n.e.A. in Hilberträumen gewonnen.
Aus dem Beweis zu 5.5 läßt sich noch nicht ersehen, ob wir auf die Forderung, daß P M in $\mathfrak{M}_e$ abbildet, verzichten können.

5.6 Es sei E ein Hilbertraum, $M \subset E$ ein konvexer Körper und

$$\mathfrak{M}_s := \{ N \in \mathfrak{K}_{\omega}(M) : N \text{ ist symmetrisch} \} .$$

Dann hat jede m.n.e.A. $P : M \longrightarrow \mathfrak{M}_s$ einen Fixpunkt.

Beweis: Es sei p(x) der (eindeutig bestimmte (s. 1.12)) Symmetriepunkt von P(x) $(\forall\, x \in M)$.

Nach 1.12 gilt für p(x)

$$2 \langle p(x), \cdot \rangle = H(\cdot, P(x)) - H(-\cdot, P(x)) .$$

Somit haben wir für alle $x,y \in M$:

$$2\, |\langle p(x) - p(y), \cdot \rangle|$$

$$\leq |H(\cdot, P(x)) - H(\cdot, P(y))| + |H(-\cdot, P(y)) - H(-\cdot, P(x))| .$$

([1]) Wir zitieren den Satz von Ky Fan nur für den für uns relevanten Fall.

Zusammen mit 1.8 erhalten wir:

$$2\ \|p(x) - p(y)\| \leq 2\ d_H(P(x), P(y)) \leq 2\ \|x - y\| \qquad (\forall\ x,y \in M);$$

d.h. $p : M \longrightarrow M$ ist eine nicht expansive Abbildung.

Nach dem Fixpunktsatz von Browder [7, Th. 1] hat p einen Fixpunkt $\underline{x}$. Aus

$$\underline{x} = p(\underline{x}) \in P(\underline{x})$$

folgt, daß auch P einen Fixpunkt hat. ■

Bemerkung:

(4) Da wir zum Beweis von 5.6 nur die Sätze 1.8 und 1.12 und den Browderschen Fixpunktsatz benötigen, bleibt die Aussage von 5.6 für alle Banachräume bestehen, in denen die Aussage des Browderschen Fixpunktsatzes gültig ist.

So zeigt Kirk [24] :

Hat E eine Normalstruktur und ist E reflexiv, $M \subset E$ ein konvexer Körper, dann hat jede nicht expansive Abbildung t, die M in sich abbildet, einen Fixpunkt. Den Spezialfall, daß E uniform konvex ist, hat Browder in [8] gezeigt.

Vermutlich läßt sich auch 5.5 mit Hilfe eines weiteren verallgemeinerten Monotoniebegriffes auch für reflexive Banachräume mit einer Normalstruktur zeigen.

(5) Eine andere Frage, die sich aus 5.6 ergibt, ist: Gibt es weitere Mengen $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{K}_\omega(M)$ von speziellen konvexen Körpern, so daß jede mengenwertige nicht expansive Abbildung von M in $\mathfrak{M}$ einen Fixpunkt hat? Aufgrund der

sehr ähnlichen Eigenschaften von Kugeln und Körpern konstanter Breite ist zu vermuten, daß für
$\mathfrak{M} = \{N \in \mathfrak{K}_{on}(M) : N$ ist von konstanter Breite$\}$
die Aussage von 5.6 gültig bleibt.

(7) Es sei E ein Hilbertraum, $M \subset E$ ein konvexer Körper und P eine m.n.e.A. von M in $\mathfrak{K}_{on}(M)$, die den Voraussetzungen von 5.5 oder 5.6 genügen möge.
Ist T eine mengenwertige Abbildung von M in $\mathfrak{K}_{on}^{b}(E)$ mit

$$\Theta \in T(x) \qquad (\forall\, x \in M),$$

dann hat

$$T + P \qquad \text{einen Fixpunkt in M.}$$

Die Abbildung T + P ist i.a keine m.n.e.A. . Somit läßt sich die Klasse der mengenwertigen Abbildungen, die M in $\mathfrak{K}_{on}^{b}(E)$ abbilden und in M einen Fixpunkt haben, erweitern. Aus diesen Überlegungen ergibt sich die Frage:

Unter welchen Voraussetzungen an eine mengenwertige Abbildung $T : M \longrightarrow \mathfrak{K}_{on}^{b}(E)$ existiert eine Zerlegung von T in zwei mengenwertigen Abbildungen

$T_1, T_2 : M \longrightarrow \mathfrak{K}_{on}^{b}(E)$, so daß gilt:

$$T_1(x) \ni \Theta \qquad (\forall\, x \in M) \ ,$$

T_2 hat einen Fixpunkt in M ?

Wie wir in § 4 gesehen haben, ist die Frage der Zerlegbarkeit nicht einfach zu beantworten. Man muß daher:

1) einfache Kriterien der Zerlegbarkeit von konvexen Körpern aufstellen;

2) Konstruktionsverfahren zur Zerlegung von konvexen Körpern aufstellen, wie wir es beispielsweise für die Einheitskugel des Hilbertraumes gemacht haben.

Anhang

Topologien auf Teilmengen

Im folgenden sei (X,τ) ein topologischer Raum. Ist $Y \subset X$, dann bezeichnen wir mit

- $\mathfrak{A}(Y)$, die Menge aller abgeschlossenen Teilmengen von X, die in Y enthalten sind;
- $\mathfrak{K}(Y)$, die Menge aller kompakten Teilmengen von X, die in Y enthalten sind.

Insbesondere ist $\mathfrak{K}(Y)$ in $\mathfrak{A}(Y)$ enthalten.

a) Die Vietoristopologie

Die Vietoristopologie $\mathfrak{V}(\tau)$ auf $\mathfrak{A}(X)$ ist die gröbste Topologie auf $\mathfrak{A}(X)$, in der für alle offenen Mengen $A \subset X$ $\mathfrak{A}(A)$ offen und $\mathfrak{A}(X \setminus A)$ abgeschlossen ist (s. [26, § 17]); d.h.

$\{\mathfrak{A}(A) : A \in \tau\}$ $\{\mathfrak{A}(X) \setminus (X\setminus A) : A \in \tau\}$ ist eine

Subbasis der Vietoristopologie. Man nennt die Vietoristopologie auch die endliche oder exponentiale Topologie (s.[26],[27]).

Von Michael übernehmen wir die folgende Bezeichnungsweise:

Ist O_x , $x \in I$, ein System von Teilmengen von X, dann setzen wir:

$$\langle O_x : x \in I\rangle := \{B \in \mathfrak{A}(X) : F \subset \bigcup_{x\in I} O_x, F \cap O_x \neq \emptyset (\forall x \in I)\}$$

oder auch

$$\langle O_{x_1}, \ldots, O_{x_n}\rangle := \langle O_x : x \in I\rangle ,$$

falls I (= $\{x_1, \ldots, x_n\}$) endlich ist.

Es gilt:

A. 1 (a) $\langle O_x : x \in I \rangle = \mathcal{O}\left(\bigcup_{x \in I} O_x\right) \cap \bigcap_{x \in I} (\mathcal{O}(X) \setminus \mathcal{O}(X \setminus O_x))$;

(b) $\{\langle O_x : x \in I \rangle : O_x \in \tau \quad (\forall x \in I)$, I endliche Indexmengen$\}$

ist eine Basis von $\mathcal{C}(\tau)$;

(c) $\{\emptyset\}$ ist ein isolierter Punkt von $(\mathcal{O}(X), \mathcal{C}(\tau))$.

Beweis: (a) folgt aus der Definition von $\langle O_x : x \in I \rangle$.
Zu (b) und (c) siehe [27] . ■

Nach A. 1 c) können wir uns auf die Betrachtung des Raumes $\mathcal{O}(X) \setminus \{\emptyset\}$ beschränken. Wir definieren daher:

$$\mathcal{O}_o(Y) := \mathcal{O}(Y) \setminus \{\emptyset\} \qquad \text{und}$$

$$\mathcal{K}_o(Y) := \mathcal{K}(Y) \setminus \{\emptyset\} \qquad \text{für } Y \subset X$$

A.2 Ist (X, τ) ein Hausdorffraum, dann gilt:

(a) $\mathcal{O}_o(A)$ ist genau dann in $\mathcal{O}_o(B)$ enthalten, wenn A in B enthalten ist;

(b) $\mathcal{O}_o(A)$ ist genau dann offen (abgeschlossen) in $\mathcal{O}_o(A)$, wenn A offen (abgeschlossen) in X ist;

(c) $\{Y \in \mathcal{O}_o(X) : Y \supset A\}$ ist für beliebiges $A \subset X$ abgeschlossen in $\mathcal{O}_o(X)$;

(d) Ist $\{O_\iota : \iota \in I\}$ eine Umgebungsbasis des Punktes

Punktes $x \in X$, dann ist $\{ \langle O_\iota \rangle : \iota \in I \}$ eine Umgebungsbasis von $\{x\}$ in $\mathfrak{N}_o(X)$.

Beweis: s. [26, Bd. I, p. 160-162], [27, Lemma 2.3].

A.3 Ist $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{K}_o(X)$ kompakt in $\mathfrak{N}_o(X)$, dann gilt

$$\bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M \in \mathfrak{K}_o(X)$$

Beweis: s. [27, Th. 2.5] . ■

A.4 (X,τ) ist genau dann kompakt, wenn $(\mathfrak{N}_o(X), \mathfrak{T}(\tau))$ kompakt ist.

Beweis: s. [27, Th. 4.2] . ■

A.5 (a) (X,τ) ist genau dann ein regulärer Raum, wenn $(\mathfrak{N}_o(X), \mathfrak{T}(\tau))$ ein Hausdorffraum ist.

(b) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(1) (X,τ) ist kompakt und metrisierbar;

(2) $(\mathfrak{N}_o(X), \mathfrak{T}(\tau))$ ist kompakt und metrisierbar;

(3) $(\mathfrak{N}_o(X), \mathfrak{T}(\tau)$ ist ein Hausdorffraum, der dem zweiten Hausdorffschen Abzählbarkeitsaxiom genügt.

(c) Die Vietoristopologie ist auf $\mathfrak{K}_o(X)$ genau dann metrisierbar, wenn (X,τ) metrisierbar ist.

Beweis: s. [27, Th. 4.9] . ■

b) Hausdorffmetrik

Es sei (X,d) ein metrischer Raum.

$\mathcal{B}_o(X)$ bezeichne die Menge aller nicht leeren, beschränkten und abgeschlossenen Teilmengen von X. Durch

$$d_H(M,N) := \max \{\sup_{x\in N} \inf_{y\in M} d(x,y), \sup_{y\in M} \inf_{x\in N} d(x,y)\},$$

$M,N \in \mathcal{B}_o(X)$, wird eine Abbildung

$$d_H : \mathcal{B}_o(X) \times \mathcal{B}_o(X) \longrightarrow [0, +\infty) \quad \text{definiert.}$$

Insbesondere ist

$$d_H(\{x\},\{y\}) = d(x,y) \quad (\forall x,y \in X).$$

Speziell für $X = E$ gilt:

A.6 (a) $(\mathcal{B}_o(E), d_H)$ ist ein metrischer Raum.
===

(b) Für $N,M \in \mathcal{B}_o(E)$ gilt

$$d_H(N,M) = \max \{\inf_{x\in M} \rho(x,N), \inf_{y\in N} \rho(y,M)\}$$

$$= \inf \{\varepsilon > 0 : M + \varepsilon U \supset N, \; N + \varepsilon U \supset M\}.$$

Beweis: (a) s. [26, Bd. I, p. 214] .

(b) durch einfaches Nachrechnen. ■

Bezeichnungen

E, E'	3	$\mathfrak{A}_o(A)$, $\mathfrak{K}_m(A)$, $\mathfrak{K}^b_m(A)$	3
$C(Q)$	31	$\mathfrak{M}_o(E)$	18
$C_o(Q)$	72	$A + B$, $-A$, sA,	1
$\bar{\mathbb{R}}$	2	con (A), $\overline{\text{con}}$ (A)	1
$(\mathfrak{A}(X), \mathcal{T}(\tau))$	110	$M \sim N$	71
$\mathfrak{A}_o(E)$, $\mathfrak{K}_m(E)$	4	$^* H$	11
$\mathfrak{L}_o(E)$	113	I	
$\mathfrak{K}^b_m(E)_{d_H}$	13	H, $H(x',\cdot)$, $H(\cdot,A)$	5
d_H	113	B, $B(x'\cdot)$, $B(\cdot,M)$,	15
$\mathcal{T}(\sigma(E,E'))$	4	$\underline{B}$	15
$<o_{K_1},\ldots,o_{K_n}>$	110	D	18
		diam (M)	15
U, U'	3	dist (x,M), dist (N,M)	14
S,S'	3	$\rho(x,M)$	18
ε', Q^*	32	$R_y(A)$, $R(A)$, $r(A)$	19
$\mathfrak{R}M$, ΓM	23		

Literaturverzeichnis

[1] Belluce, L.P., Kirk, W.A. — Nonexpansive mappings and fixed-points in Banach spaces. Illinois J.Math.11(1967),474-479.

[2] Belluce, L.P., Kirk, W.A., Steiner, E.F. — Normal structure in Banach spaces. Pacific J.Math.16(1968),433-439.

[3] Bonnessen, T., Fenchel,W. — Theorie der konvexen Körper. Springer, Berlin 1934 (Nachdruck: Chelsea, New York 1948).

[4] Bourbaki, N. — Éléments de mathématique, Livre III: Topologie générale, Chap.1-2 (Act.Sci.et Ind. Nr.1142), Chap.3-4 (Act.Sci.et Ind. Nr.1143), Chap.9 (Act.Sci.et Ind. Nr.1045), Herrann, Paris(1965,1960,1958).

[5] Bourbaki, N. — Éléments de mathématique, Livre V: Espaces vectoriel topologique, Chap.1-2 (Act.Sci.et Ind. Nr.1189), Chap.3-5 (Act.Sci.et Ind. Nr.1229), Hermann, Paris(1951,1967).

[6] Brodskii, M.S., Milman, D.P. — Über das Zentrum einer konvexen Menge Dokl.Akad.Naukk SSSR(N.S.)59(1948), 837-840 (Russisch)

[7] Browder, F. Fixed-point theorems for noncompact mappings in Hilbert space. Proc.Nat.Acad.Sci. U.S.A. 53(1965), 1272-1276 .

[8] Browder, F. Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space. Proc.Nat.Acad.Sci. U.S.A. 54(1965), 1041-1044 .

[9] Day, M.M., James, R.C., Swaminathan, S. Normed linear spaces that are uniformly convex in every direction. Canad.J.Math.23(1971),1051-1059 .

[10] Deutsch, F.R., Maserick, P.H. Applications of the Hahn-Banach theorem in approximation theory. SIAM Rev.9(1967),516-530 .

[11] Dierolf, P. Über den Auswahlsatz von Blaschke und ein Problem von Valentine. Manuscripta Math.3(1970),289-304 .

[12] Dieudonné, J. Une généralization des espaces compacts. J.Math.Pures Appl.23(1944),65-76 .

[13] Eggleston, H.G. Convexity . Cambridge Univ.Press, Cambridge 1969 .

[14] Eggleston, H.G. Sets of constant width in finite dimensional Banach spaces. Israel J.Math.3(1965),163-172 .

[15] Fan, Ky — Fixed point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces. Proc.Nat.Acad.Sci. U.S.A. 38(1952), 121-126 .

[16] Gale, D. — Irreducible convex sets. Proc.Intern.Congr.Math. Amsterdam (1954),Vol.2,217-218 .

[17] Garkavi, A.L. — The best possible net and the best possible cross-section of a set in a normed space. Amer.Math.Soc.Transl.,Ser.2,39(1964), 111-132 (engl.Übersetzung).

[18] George, J.H., Sehgal, V.M., Smithson, R.E. — Application of Liapunov's direct method to fixed point theorems. Proc.Amer.Math.Soc.28(1971),613-620 .

[19] Grünbaum, B. — Convex Polytopes Intersience Pub.,London,New York, Sidney 1967 .

[20] Hörmander, L. — Sur la fonction d'appui des ensembles convexes dans un espace localement convexe. Archiv.f.Math.3(1954),181-186 .

[21] Jaglom, I.M., Boltjanski, W.G. — Konvexe Figuren. Deutscher Verlag d.Wiss., Berlin 1956 .

[22] Jameson, G.J.O. — Topology and normal spaces. Chapman and Hall, London 1974 .

[23] Kelley, J.L. General topology.
D.v.Nostrand Comp.,Toronto,London,
Princeton 1955 .

[24] Kirk, W.A. A fixed point theorem for mappings
which do not increase distances.
Amer.Math.Monthly 72(1965),100-1006 .

[25] Klee, V. Circumsphere and inner products.
Math.Scand.8(1960), 362-370 .

[26] Kuratowski, K. Topology I,II.
Acad.Press, New York 1966 .

[27] Michael, E. Topology on spaces of subsets.
Trans.Amer.Math.Soc.71(1951),152-182 .

[28] Nadler, S.B. Multi-valued constraction mappings.
Pacific J.Math.30(1969),475-487 .

[29] Rockafeller, R.t. Convex Analysis.
Princeton Univ.Press, New Jersey,1970.

[30] Routledge, N.A. A result in Hilbert space.
Quart.J.Math. Oxford Ser.3(1952),12-18.

[31] Shephard, G.C. Reducible convex sets.
Matheratika 13(1966),49-50 .

[32] Smart, D.R. Fixed point theorems.
Cambridge Univ.Press, Cambridge 1974 .

[33] Smithson, R.E. Multifunctions.
Nieuw.Arch.Wisk.20(1972),31-53 .

[34] Stone, M.H. — Boundedness Properties in functional-lattices. Canad.J.Math.1(1949),176-186 .

[35] Valadier, M. — Contribution á l'analyse convexe. Diss.Univ.Montpellier 1970, N° d'enregistrement ou C.N.P.R. A 0 4 0 6 8 .

[36] Valentine, F.A. — Konvexe Mengen. Bibliographisches Institut, Mannheim 1968 .

[37] Wegmann, R. — Der Wertebereich von Vektorintegralen. Z.Wahrscheinlichkeitsth.Verw. Gebiete 14(1970),203-238 .

[38] Zamjatin, V.N., Kadec, M.I. — Cebysev Zentrum im Paum C[a,b]. Teor.Funkcii Funkcional.Anal.i Prilozen 7(1968),20-26 (Russisch) .

Lebenslauf

Am 27.5.1947 wurde ich als Sohn des Kaufmanns Karl-Heinz Schmidtmann und seiner Ehefrau Lisa, geb. Kirchner in Holzminden geboren.

Im April 1953 wurde ich in die Grundschule in Holzminden eingeschult und wechselte 1958 auf die Realschule für Jungen über. Von 1962 - 1966 besuchte ich das Gymnasium für Jungen und legte dort im Oktober 1966 die Reifeprüfung ab.

Nach eineinhalbjähriger Wehrdienstzeit begann ich im SS 68 an der TU Clausthal das Studium in den Fächern Mathematik und Physik. Im SS 70 setzte ich mein Studium an der Universität Göttingen fort. Dort bestand ich im Oktober 1972 die Diplomhauptprüfung in Mathematik.

Seit November 1972 bin ich als wissenschaftlicher Assistent an den Lehrstühlen für Numerische und Angewandte Mathematik der Universität Göttingen tätig.

Seit 1972 bin ich verheiratet.